IMC–2011

1. Έστω $f;\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση με

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|\,dt<+\infty \quad \text{και} \quad \int_{-\infty}^{\infty}|f'(t)|^2dt<+\infty.$$

Δείξτε ότι η f είναι φραγμένη.

2. Έστω $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι το $\int_0^\infty f(t)dt$ υπάρχει και ότι η συνάρτηση $G:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με

$$G(x):=\int_x^{x+1}|f'(t)|^2dt$$

είναι φραγμένη. Δείξτε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

3. Σωστό ή λάθος; Υπάρχει $A\subseteq\mathbb{N}$ ώστε

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}\sum_{n\in A}\frac{x^n}{n!}=1.$$

4. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνάρτηση με την εξής ιδιότητα: αν $a_n\in\mathbb{R}$ και η σειρά $\sum_{n=1}^\infty a_n$ συγκλίνει τότε η σειρά $\sum_{n=1}^\infty f(a_n)$ συγκλίνει. Δείξτε ότι υπάρχουν $\delta>0$ και $\lambda\in\mathbb{R}$ ώστε $f(x)=\lambda x$ για κάθε $x\in(-\delta,\delta)$.

5. Έστω $\{a_n\}$ ακολουθία πραγματικών αριθμών ώστε: (α) η σειρά $\sum_{n=1}^\infty|a_n|$ να συγκλίνει και (β) για κάθε $k\geq 1$,

$$\sum_{n=1}^\infty a_n^k=0.$$

Δείξτε ότι $a_n=0$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$.

6. Έστω $f,g:[0,1]\to\mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις με την εξής ιδιότητα: αν $x_1,x_2\in[0,1]$ και $f(x_1)=f(x_2)$, τότε $g(x_1)=g(x_2)$. Δείξτε ότι υπάρχει ακολουθία πολυωνύμων $\{p_n\}$ ώστε $p_n\circ f\to g$ ομοιόμορφα στο $[0,1]$ καθώς το $n\to\infty$.

7. Έστω $\{f_n\}$ ακολουθία παραγωγίσιμων συναρτήσεων $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$ με $\|f_n'\|_\infty\leq 1$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$. Υποθέτουμε ότι

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)g(x)\,dx=0$$

για κάθε συνεχή συνάρτηση $g:[0,1]\to\mathbb{R}$. Δείξτε ότι $\|f_n\|_\infty\to 0$ καθώς το $n\to\infty$.

8. Δείξτε ότι υπάρχει ακολουθία $\{a_n\}$ πραγματικών αριθμών με την εξής ιδιότητα: για κάθε συνεχή συνάρτηση $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ με $f(0)=0$ υπάρχει γνησίως αύξουσα ακολουθία $\{k_n\}$ φυσικών αριθμών, η οποία εξαρτάται από την f, ώστε $\sum_{k=1}^{k_n}a_kx^k\to f$ ομοιόμορφα στο $[0,1]$ καθώς το $n\to\infty$.

9. Έστω $f_0:[0,1]\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Ορίζουμε ακολουθία συναρτήσεων $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$ μέσω της

$$f_n(x)=\int_0^x f_{n-1}(t)\,dt,\qquad x\in[0,1].$$

Υποθέτουμε ότι για κάθε $x\in[0,1]$ υπάρχει $n=n_x\in\mathbb{N}$ ώστε $f_n(x)=0$. Δείξτε ότι:

(α) Υπάρχει διάστημα $I\subset[0,1]$ στο οποίο $f_0\equiv 0$.

(β) Για κάθε $n\in\mathbb{N}$ και για κάθε $0<b\leq 1$, η f_n μηδενίζεται σε άπειρα το πλήθος σημεία του $(0,b)$.

10. Έστω $\{a_n\}$ ακολουθία πραγματικών αριθμών. Δείξτε ότι υπάρχει συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ άπειρες φορές παραγωγίσιμη, με $f^{(n)}(0) = a_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

11. Έστω $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχείς και 1-περιοδικές συναρτήσεις. Δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(x)g(nx)\,dx = \left(\int_0^1 f(x)dx\right)\left(\int_0^1 g(x)dx\right).$$

12. (α) Έστω $g : (0,1) \to \mathbb{R}$ μη αρνητική συνάρτηση με $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = +\infty$. Δείξτε ότι υπάρχει μη αρνητική, κυρτή συνάρτηση $\varphi : (0,1) \to \mathbb{R}$ ώστε $\varphi \leq g$ και $\lim\limits_{x\to 0^+} \varphi(x) = +\infty$.

(β) Σωστό ή λάθος; Έστω $g : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ μη αρνητική συνάρτηση με $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = +\infty$. Τότε, υπάρχει μη αρνητική, κυρτή συνάρτηση $\varphi : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ ώστε $\varphi \leq g$ και $\lim\limits_{x\to\infty} \varphi(x) = +\infty$.

13. Έστω $f : [1, +\infty) \to (0, +\infty)$ συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση με

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{f(x)} = -\infty.$$

Δείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ συγκλίνει. Αν $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} f(k)$, δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \frac{R_n}{f(n+1)} = 1.$$

14. Εξετάστε αν συγκλίνει η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, όπου

$$a_n = \int_0^1 \left[1 - (1 - t^n)^{1/n}\right] dt.$$

15. Έστω $0 < \alpha < 1$. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\ln(1 + \alpha\cos x)}{\cos x}\,dx.$$