Ασκήσεις

1. Έστω G ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ το οποίο δεν είναι άνω φραγμένο. Δείξτε ότι υπάρχουν $x > 0$ και γνησίως αύξουσα ακολουθία (k_n) φυσικών αριθμών ώστε $k_n x \in G$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

2. Έστω (G_m) ακολουθία ανοικτών υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ τα οποία δεν είναι άνω φραγμένα. Δείξτε ότι υπάρχει $x > 0$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε $m \in \mathbb{N}$ υπάρχει γνησίως αύξουσα ακολουθία (k_n) φυσικών αριθμών ώστε $k_n x \in G_m$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

3. Έστω A άπειρο υποσύνολο του $\mathbb{N}$. Δείξτε ότι υπάρχουν $b > 1$ και γνησίως αύξουσα ακολουθία (k_n) φυσικών αριθμών ώστε $\lfloor b^{k_n} \rfloor \in A$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

4. Έστω E συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ το οποίο καλύπτεται από μια ακολουθία (B_m) από μπάλες. Δείξτε ότι υπάρχουν $k_1 < \cdots < k_s$ ώστε οι B_{k_j} να είναι ξένες και

$$\sum_{j=1}^{s} \mathrm{vol}(B_{k_j}) \geq C_n \mathrm{vol}(E),$$

όπου $C_n > 0$ σταθερά που εξαρτάται μόνο από το n.

5. Δείξτε ότι ένα μη κενό ανοικτό διάστημα δεν μπορεί να γραφτεί σαν ένωση μιας ακολουθίας ξένων κλειστών συνόλων.

6. Δείξτε ότι το επίπεδο δεν μπορεί να γραφτεί σαν ένωση μιας ακολουθίας ξένων κλειστών δίσκων που ανά δύο έχουν ξένα εσωτερικά.

Μπορεί να γραφτεί σαν ένωση μιας ακολουθίας ξένων ανά δύο, μη κενών κλειστών συνόλων;

7. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Γράφουμε $L(f)$ για το σύνολο των σημείων στα οποία η f είναι ασυνεχής από αριστερά και $R(f)$ για το σύνολο των σημείων στα οποία η f είναι ασυνεχής από δεξιά. Δείξτε ότι: αν το $L(f)$ είναι αριθμήσιμο τότε το $R(f)$ είναι αριθμήσιμο (και, όμοια, αν το $R(f)$ είναι αριθμήσιμο τότε το $L(f)$ είναι αριθμήσιμο).

8. Έστω $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$. Αν για κάθε $x > 0$ υπάρχει το $\lim_{n\to\infty} f(nx)$, δείξτε ότι υπάρχει το $\lim_{x\to\infty} f(x)$.

9. Να οριστεί συνάρτηση $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ με τις εξής ιδιότητες:

1. Για κάθε $x \geq 0$, $\lim_{n\to\infty} f(nx) = 0$.
2. Η f είναι φραγμένη σε κάθε φραγμένο διάστημα και έχει μόνο ασυνέχειες πρώτου είδους.
3. Για κάθε $y \in \mathbb{R}$ υπάρχει ακολουθία $t_n \to \infty$ ώστε $f(t_n) \to y$.

10. Να οριστεί συνάρτηση $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ με τις εξής ιδιότητες:

1. Για κάθε $x \geq 0$, $\lim_{n\to\infty} f(nx) = 0$.
2. Για κάθε διάστημα (a, b) (όπου $b > a > 0$) ισχύει $f((a, b)) = \mathbb{R}$.

11. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ και έστω $f : A \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση που έχει τοπικό ακρότατο σε κάθε μη μεμονωμένο σημείο του A. Δείξτε ότι το σύνολο $f(A)$ είναι αριθμήσιμο.

Ισχύει το ίδιο αν αντικαταστήσουμε το A με κάποιον διαχωρίσιμο μετρικό χώρο; με τυχόντα μετρικό χώρο;

12. Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση με την εξής ιδιότητα: για κάθε $t \in \mathbb{R}$, το σύνολο $A_t = \{x \in [a, b] : f'(x) = t\}$ είναι κλειστό. Δείξτε ότι η f' είναι συνεχής.