Προβλήματα Ανάλυσης – Ολοκλήρωμα

1. (α) Έστω $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ συνάρτηση με συνεχή παράγωγο. Δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) - \int_0^1 f(x)\,dx\right) = \frac{f(1)-f(0)}{2}.$$

(β) Έστω $k\geq 0$. Υπολογίστε το

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1^k+2^k+\cdots+n^k}{n^{k+1}} - \frac{1}{k+1}\right).$$

2. (α) Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής, με

$$\int_a^b f(x)\,dx = 0.$$

Δείξτε ότι υπάρχει $\theta\in(a,b)$ ώστε

$$\int_a^\theta f(x)\,dx = f(\theta).$$

(β) Έστω $0<a<b$ και $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής, με

$$\int_a^b f(x)\,dx = 0.$$

Δείξτε ότι υπάρχει $\theta\in(a,b)$ ώστε

$$\int_a^\theta f(x)\,dx = \theta f(\theta).$$

3. Έστω $f:[0,1]\to(0,\infty)$ συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι, για κάθε $n\in\mathbb{N}$ υπάρχει $\theta(n)\in(0,1)$ ώστε

$$\frac{1}{n}\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^{\theta(n)} f(x)\,dx + \int_{1-\theta(n)}^1 f(x)\,dx.$$

Υπολογίστε το $\lim_{n\to\infty} n\theta(n)$.

4. Έστω $a>0$ και $f:[-a,a]\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση.

(α) Αν

$$\int_{-a}^a x^{2n} f(x)\,dx = 0$$

για κάθε $n=0,1,2,\ldots$, δείξτε ότι η f είναι περιττή.

(β) Αν

$$\int_{-a}^a x^{2n+1} f(x)\,dx = 0$$

για κάθε $n=0,1,2,\ldots$, δείξτε ότι η f είναι άρτια.

5. Έστω p ένα πολυώνυμο βαθμού n με την ιδιότητα

$$\int_0^1 x^k p(x)\,dx = 0, \qquad k = 1, \ldots, n.$$

Δείξτε ότι

$$\int_0^1 (p(x))^2 dx = (n+1)^2 \left(\int_0^1 p(x)\,dx \right)^2.$$

6. Έστω $\mathcal{A}$ η οικογένεια όλων των συνεχών συναρτήσεων $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ που ικανοποιούν τις

$$\int_0^1 f(x)\,dx = 3 \quad \text{και} \quad \int_0^1 x f(x)\,dx = 2.$$

Να βρεθεί το

$$\min_{f \in \mathcal{A}} \int_0^1 f^2(x)\,dx.$$

7. Έστω $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση με $0 \leq g(x) \leq 1$ για κάθε $x \in [a,b]$, και έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ φθίνουσα συνάρτηση. Δείξτε ότι

$$\int_{b-s}^b f(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)g(x)\,dx \leq \int_a^{a+s} f(x)\,dx,$$

όπου

$$s = \int_a^b g(x)\,dx.$$

8. Έστω $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση με $0 \leq g(x) \leq 1$ για κάθε $x \in [a,b]$, και έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ μη αρνητική και φθίνουσα συνάρτηση. Δείξτε ότι, για κάθε $p \geq 1$,

$$\left(\int_0^1 f(x)g(x)\,dx \right)^p \leq \int_0^s (f(x))^p dx,$$

όπου

$$s = \left(\int_a^b g(x)\,dx \right)^p.$$

9. Έστω $f : [0,a] \to \mathbb{R}$ συνάρτηση με συνεχή παράγωγο και $f(0) = 0$. Δείξτε ότι

$$\int_0^a |f(x)f'(x)|\,dx \leq \frac{a}{2} \int_0^a (f'(x))^2 dx.$$

10. Έστω $f : [0,a] \to \mathbb{R}$ συνάρτηση με συνεχή παράγωγο και $f(0) = 0$. Δείξτε ότι, για κάθε $p \geq 0$, $q \geq 1$,

$$\int_0^a |f(x)|^p |f'(x)|^q\,dx \leq \frac{qa^p}{p+q} \int_0^a |f'(x)|^{p+q} dx.$$