Προβλήματα Ανάλυσης

1. Εξετάστε αν ο $\sqrt{2}$ είναι το όριο ακολουθίας αριθμών της μορφής $\sqrt[3]{n} - \sqrt[3]{m}$, $m, n = 0, 1, 2, \ldots$.

2. Σωστό ή λάθος; Το σύνολο $D = \{2^m \cdot 3^n : m, n \in \mathbb{Z}\}$ είναι πυκνό στο $[0, +\infty)$.

3. Ορίζουμε $G : (0, +\infty) \to [0, +\infty)$ με

$$G(r) = \min\{|r - \sqrt{m^2 + 2n^2}| : m, n \in \mathbb{Z}\}.$$

Είναι σωστό ότι $\lim_{r\to\infty} G(r) = 0$;

4. Δείξτε ότι: για κάθε σύνολο $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ πραγματικών αριθμών, μπορούμε να βρούμε μη κενό $S \subseteq X$ και $m \in \mathbb{Z}$ ώστε

$$\left| m - \sum_{x\in S} x \right| \leq \frac{1}{n+1}.$$

5. Υπολογίστε το

$$f(n) = \max\left\{ \sum_{1\leq i<j\leq n} |x_i - x_j| : 0 \leq x_i \leq 1 \right\}.$$

6. Έστω $a_1, a_2, \ldots, a_n$ και $b_1, b_2, \ldots, b_n$ θετικοί πραγματικοί αριθμοί. Δείξτε ότι

$$(a_1 a_2 \cdots a_n)^{1/n} + (b_1 b_2 \cdots b_n)^{1/n} \leq [(a_1 + b_1)(a_2 + b_2) \cdots (a_n + b_n)]^{1/n}.$$

7. Έστω $a_1, \ldots, a_n \in (0, \pi)$ και έστω $m = (a_1 + \cdots + a_n)/n$ ο αριθμητικός τους μέσος. Δείξτε ότι

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{\sin a_i}{a_i} \leq \left(\frac{\sin m}{m}\right)^n.$$

8. Έστω $-1 \leq x_1 < x_2 < \cdots < x_n \leq 1$. Δείξτε ότι

$$\sum_{1\leq j<k\leq n} \frac{1}{x_k - x_j} \geq \frac{n^2 \log n}{8}.$$

9. Έστω $p(x)$ πολυώνυμο με την ιδιότητα: $p(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι, για κάποιο k, υπάρχουν πολυώνυμα $q_1(x), \ldots, q_k(x)$ ώστε

$$p(x) = \sum_{j=1}^{k} (q_j(x))^2.$$

10. Έστω $f : \mathbb{N} \to (0, +\infty)$ με $\lim_{n\to\infty} f(n) = 0$. Δείξτε ότι η εξίσωση $f(n) + f(m) + f(s) = 1$ έχει πεπερασμένες το πλήθος λύσεις.

11. Έστω (a_n) ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών με $a_n \to 0$. Θεωρούμε $k \in \mathbb{N}$ και ορίζουμε

$$S_k := \{a_{n_1} + a_{n_2} + \cdots + a_{n_k} : n_1 < n_2 < \cdots < n_k\}.$$

Δείξτε ότι κάθε ανοικτό διάστημα (a, b) περιέχει υποδιάστημα (c, d) το οποίο δεν περιέχει σημεία του S_k.

12. Έστω (a_n) ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών που ικανοποιεί την $a_{n+m} \leq a_n a_m$ για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι η ακολουθία $b_n = \sqrt[n]{a_n}$ συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό.

13. Έστω (a_n) γνησίως αύξουσα ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών με την ιδιότητα $a_n/n \to 0$. Δείξτε ότι υπάρχουν άπειροι φυσικοί n που ικανοποιούν το εξής: $a_{n-i} + a_{n+i} < 2a_n$ για κάθε $i = 1, \ldots, n-1$.

14. Έστω (a_k) ακολουθία φυσικών αριθμών. Υποθέτουμε ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a_k}$ συγκλίνει. Αν b_n είναι το πλήθος των a_k που είναι μικρότεροι ή ίσοι του n, δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{n} = 0.$$

15. Έστω $(x_1, y_1) = (4/5, 3/5)$. Ορίζουμε δύο ακολουθίες (x_n), (y_n) θέτοντας

$$x_{n+1} = x_n \cos y_n - y_n \sin y_n, \quad y_{n+1} = x_n \sin y_n + y_n \cos y_n$$

για κάθε $n = 1, 2, \ldots$. Εξετάστε αν οι (x_n), (y_n) συγκλίνουν (αν ναι, προσδιορίστε τα όρια τους).

16. Για κάθε ζευγάρι (x, y) πραγματικών αριθμών ορίζουμε μια ακολουθία $(a_n(x, y))$ θέτοντας $a_1(x, y) = x$ και

$$a_{n+1}(x, y) = \frac{(a_n(x, y))^2 + y^2}{2}, \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου

$$D = \{(x, y) \mid \text{η } (a_n(x, y)) \text{ συγκλίνει}\}.$$

17. Εξετάστε αν υπάρχει το $\lim_{n\to\infty} n(1 - \sin(n))$.

18. Έστω $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ μια 1-1 και επί συνάρτηση. Αν υπάρχει το $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{n}$, δείξτε ότι $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{n} = 1$.

19. Δείξτε ότι δεν υπάρχει 1-1 συνάρτηση $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ με την ιδιότητα

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^2} < +\infty.$$

20. Έστω $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$ και $a_0 > 0$. Ορίζουμε ακολουθία (a_n) μέσω της αναδρομικής σχέσης

$$a_{n+1} = a_n + \frac{1}{\sqrt[k]{a_n}}.$$

Προσδιορίστε το

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n^{k+1}}{n^k}.$$

21. Έστω (a_n) ακολουθία πραγματικών αριθμών με την ιδιότητα $\lim_{n\to\infty} a_n \sum_{k=1}^{n} a_k^2 = 1$. Δείξτε ότι $\sqrt[3]{3n}a_n \to 1$.

22. Δίνεται ακολουθία (a_n) πραγματικών αριθμών η οποία ικανοποιεί την $0 < a_n \leq a_{2n} + a_{2n+1}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ αποκλίνει.

23. Έστω (a_n) ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών. Δείξτε ότι: αν η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει, τότε η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{n/(n+1)}$ συγκλίνει.

24. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ συμβολίζουμε με $a(n)$ το πλήθος των μηδενικών στην 3-αδική αναπαράσταση του n. Προσδιορίστε τους θετικούς πραγματικούς αριθμούς x για τους οποίους η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{a(n)}}{n^3}$$

συγκλίνει.

25. Έστω $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$. Θέτουμε $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ και, για κάθε $n \geq 3$, ορίζουμε $a_n = na_s$, όπου s το πλήθος των ψηφίων στην k-αδική αναπαράσταση του n. Να βρεθούν οι τιμές του k για τις οποίες συγκλίνει η σειρά
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}.$$

26. Δείξτε ότι αν η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ συγκλίνει τότε $\lim_{n\to\infty}(a_1 + \cdots + a_n)/n = 0$.

27. Έστω $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι η f είναι φθίνουσα, μη αρνητική και η g ολοκληρώσιμη. Δείξτε ότι
$$\left| \int_a^b f(x)g(x)\, dx \right| \leq f(a) \sup_{u\in[a,b]} \left| \int_a^u g(x)\, dx \right|.$$

28. Εξετάστε αν συγκλίνει η σειρά
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\sqrt{n})}{n}.$$

29. Εξετάστε αν συγκλίνει η σειρά
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\log n)}{n}.$$

30. Δείξτε την ανισότητα
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+m} \sqrt{\frac{m}{n}} < \pi.$$

31. Δείξτε ότι κάθε άρρητος $\xi \in (0, 1)$ γράφεται μονοσήμαντα στη μορφή
$$\xi = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{a_1 a_2 \cdots a_n}$$
όπου (a_k) γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών. Αν $\xi = 1/\sqrt{2}$, βρείτε τους a_1, a_2, a_3.

32. Έστω (n_k) γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών. Αν $\lim_{n\to\infty} \frac{n_{k+1}}{n_1 n_2 \cdots n_k} = +\infty$ τότε ο $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n_k}$ είναι άρρητος.

33. Έστω (n_k) γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών. Αν $\lim_{n\to\infty} \sqrt[2^k]{n_k} = +\infty$ τότε ο $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n_k}$ είναι άρρητος.

34. Έστω $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$. Δείξτε ότι ο $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k^{n^2}}$ είναι άρρητος.

35. Έστω S το σύνολο των ρητών αριθμών που είναι διαφορετικοί από $-1, 0, 1$. Ορίζουμε $f : S \to S$ με $f(x) = x - \frac{1}{x}$. Θέτουμε $f^{(n)}$ τη σύνθεση της f με τον εαυτό της n φορές. Εξετάστε αν
$$\bigcap_{n=1}^{\infty} f^{(n)}(S) \neq \emptyset.$$

36. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι: για κάθε $a > 0$, $\lim_{n\to\infty} f(na) = 0$. Δείξτε ότι $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

37. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνάρτηση με συνεχή τρίτη παράγωγο. Δείξτε ότι υπάρχει $t \in \mathbb{R}$ ώστε
$$f(t) \cdot f'(t) \cdot f''(t) \cdot f'''(t) \geq 0.$$

38. Βρείτε όλους τους πραγματικούς αριθμούς t που ικανοποιούν το εξής: αν $f:\mathbb{R}\to(0,+\infty)$ είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση με την ιδιότητα $f'(x)>f(x)$ για κάθε x, τότε υπάρχει $M>0$ ώστε $f(x)>e^{tx}$ για κάθε $x>M$.

39. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ άπειρες φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση, Αν

$$f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{n^2}{n^2+1},\qquad n=1,2,3,\dots$$

υπολογίστε την $f^{(k)}(0)$ για κάθε $k\in\mathbb{N}$.

40. Έστω $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μη σταθερές παραγωγίσιμες συναρτήσεις, οι οποίες ικανοποιούν τις

$$\begin{aligned} f(x+y) &= f(x)f(y)-g(x)g(y) \\ g(x+y) &= f(x)g(y)+g(x)f(y) \end{aligned}$$

για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$. Αν $f'(0)=0$, δείξτε ότι $(f(x))^2+(g(x))^2=1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

41. Εξετάστε αν υπάρχει ακολουθία $a_0,a_1,a_2,\dots$ μη μηδενικών πραγματικών αριθμών με την εξής ιδιότητα: για κάθε $n=1,2,3,\dots$ το πολυώνυμο

$$p_n(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$$

έχει ακριβώς n διακεκριμένες πραγματικές ρίζες.

42. Έστω a,b θετικοί πραγματικοί αριθμοί. Υπολογίστε το

$$\int_0^a\int_0^b e^{\max\{b^2x^2,a^2y^2\}}dy\,dx.$$

43. Έστω $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ με $f(0)=0$. Υποθέτουμε ότι η f έχει συνεχή παράγωγο και ότι $0<f'(x)\leq 1$ για κάθε $x\in[0,1]$. Δείξτε ότι

$$\left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)^2\geq\int_0^1[f(x)]^3dx.$$

Δώστε παράδειγμα στο οποίο να ισχύει ισότητα.

44. Έστω $f:[1,+\infty)\to(0,+\infty)$ συνεχής συνάρτηση και έστω $c>0$ με την ιδιότητα

$$\int_1^t f(x)\,dx\leq ct^2$$

για κάθε $t>1$. Δείξτε ότι

$$\int_1^\infty\frac{1}{f(x)}\,dx=\infty.$$

45. Έστω $f:[0,a]\to\mathbb{R}$ συνάρτηση με συνεχή παράγωγο και $f(0)=0$. Δείξτε ότι

$$\int_0^a|f(t)f'(t)|\,dt\leq\frac{a}{2}\int_0^a|f'(t)|^2dt.$$

46. Υποθέτουμε ότι η $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ έχει συνεχή παράγωγο και ότι $\int_0^1 f(x)\,dx=0$. Δείξτε ότι: για κάθε $t\in(0,1)$,

$$\left|\int_0^t f(x)\,dx\right|\leq\frac{1}{8}\max_{0\leq x\leq 1}|f'(x)|.$$

47. Έστω C το σύνολο όλων των $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ που έχουν συνεχή παράγωγο και ικανοποιούν τις $f(0) = 0$, $f(1) = 1$. Βρείτε το

$$\inf \left\{ \int_0^1 |f'(x) - f(x)|\, dx : \, f \in C \right\}.$$

48. Έστω $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ πολυώνυμο βαθμού $n \geq 1$. Δείξτε ότι το σύνολο των $a \in \mathbb{R}$ για τους οποίους ισχύουν ταυτόχρονα οι

$$\int_0^a p(x) \sin x\, dx = 0 \quad \text{και} \quad \int_0^a p(x) \cos x\, dx = 0$$

είναι πεπερασμένο.

49. Έστω $T : [0,1] \times [0,1] \to (0, +\infty)$ μια συνεχής συνάρτηση και έστω $f, g : [0,1] \to (0, +\infty)$ συνεχείς συναρτήσεις. Αν

$$\int_0^1 f(y) T(x,y)\, dy = g(x) \quad \text{και} \quad \int_0^1 g(y) T(x,y)\, dy = f(x)$$

για κάθε $x \in [0,1]$, δείξτε ότι $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in [0,1]$.

50. Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι

$$\int_0^1 \int_0^1 |f(x) + f(y)|\, dx\, dy \geq \int_0^1 |f(x)|\, dx.$$

51. Δείξτε ότι: για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει σταθερά $C_n > 0$ ώστε

$$|p(0)| \leq C_n \int_{-1}^1 |p(x)|\, dx$$

για κάθε πολυώνυμο p βαθμού n.

52. Έστω $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχείς περιοδικές συναρτήσεις με περίοδο $T = 1$. Δείξτε ότι

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^1 f(x) g(nx)\, dx = \left(\int_0^1 f(x)\, dx \right) \left(\int_0^1 g(x)\, dx \right).$$

53. Έστω $f, g : [0,1] \to (0, +\infty)$ συνεχείς συναρτήσεις με

$$\int_0^1 f(x)\, dx = \int_0^1 g(x)\, dx = 1.$$

Τότε, υπάρχει υποδιάστημα $[c,d] \subset [0,1]$ ώστε

$$\int_c^d f(x)\, dx = \int_c^d g(x)\, dx = \frac{1}{2}.$$

Χρειάζονται οι υποθέσεις που κάναμε για τις f και g;

54. Έστω $m, n \in \mathbb{N}$. Συμβολίζουμε με $f(m,n)$ το πλήθος των n-άδων $(x_1, \ldots, x_n)$ ακεραίων που ικανοποιούν την $|x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n| \leq m$. Δείξτε ότι $f(n,m) = f(m,n)$.

55. Έστω $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ στο $\mathbb{R}$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \setminus \{a_1, \ldots, a_n\} \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \frac{1}{x - a_1} + \cdots + \frac{1}{x - a_n}.$$

Δείξτε ότι, για $y \neq 0$, η εξίσωση $f(x) = y$ έχει n πραγματικές ρίζες. Πόσες έχει για $y = 0$; Τι μορφή έχει το σύνολο $A_y = \{x : f(x) > y\}$ και ποιό είναι το συνολικό του μήκος;

56. Έστω $n \in \mathbb{N}$. Ξεκινώντας από την ακολουθία $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}$, δημιουργούμε μια νέα ακολουθία με $n-1$ όρους: $\frac{3}{4}, \frac{5}{12}, \ldots, \frac{2n-1}{2n(n-1)}$, παίρνοντας τους μέσους όρους δύο διαδοχικών όρων της προηγούμενης ακολουθίας. Συνεχίζουμε με τον ίδιο τρόπο, φτιάχνοντας τρίτη ακολουθία με $n-2$ όρους κλπ. Στο τέλος αυτής της διαδικασίας (μετά από $n-1$ βήματα) προκύπτει ένας αριθμός x_n. Δείξτε ότι $x_n < \frac{2}{n}$.

57. Έστω $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$. Δείξτε ότι

$$\frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^{n} |z_j| \leq \max_{I \subseteq \{1, \ldots, n\}} \left| \sum_{j \in I} z_j \right|.$$

58. Έστω n ένας περιττός φυσικός αριθμός και έστω $\theta \in \mathbb{R}$ ώστε ο θ/π να είναι άρρητος. Ορίζουμε $a_k = \tan(\theta + k\pi/n)$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Δείξτε ότι ο

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{a_1 a_2 \cdots a_n}$$

είναι ακέραιος και προσδιορίστε την τιμή του.

59. Επιλέγουμε δύο πραγματικούς αριθμούς x και y ανεξάρτητα και ομοιόμορφα από το $(0, 1)$. Υπολογίστε την πιθανότητα να είναι άρτιος ο πλησιέστερος ακέραιος προς τον x/y.

60. Έστω $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ τυχαίο σημείο που επιλέγεται ομοιόμορφα από το χωρίο $0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < 1$. Έστω $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $f(1) = 0$. Θέτουμε $x_0 = 0$, $x_{n+1} = 1$ και θεωρούμε το άθροισμα Riemann

$$S(f, \mathbf{x}) = \sum_{i=0}^{n} (x_{i+1} - x_i) f(x_{i+1}).$$

Δείξτε ότι η μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής $S(f, \mathbf{x})$ είναι ίση με $\int_0^1 f(t)P(t)\,dt$, όπου P είναι πολυώνυμο βαθμού n, ανεξάρτητο από την f, με την ιδιότητα $0 \leq P(t) \leq 1$ για κάθε $t \in [0, 1]$.