Προβλήματα για το διαγωνισμό επιλογής
για τη Μαθηματική Ολυμπιάδα πρωτοετών και δευτεροετών φοιτητών

2 Απριλίου 2022

Πρόβλημα 1: Δίνεται διπλά παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f(x) > 0$, $f'(x) > 0$ και $f(x)f''(x) \leq 2(f'(x))^2$ για κάθε $x \geq 0$. Δείξτε ότι

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{(f(x))^2} = 0\,.$$

Πρόβλημα 2: Δείξτε ότι

$$(\det(A))^2 \leq \left(\frac{1}{n}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2\right)^n$$

για κάθε $n \times n$ πίνακα $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Πρόβλημα 3: Δείξτε ότι για κάθε θετικό ακέραιο n,

$$\frac{3^n}{2^{4n+1}} \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{n+k+1}\binom{n}{k} \leq 2^{-2n}.$$

Πρόβλημα 4: Δίνεται ο $n \times n$ πίνακας A_n το (i, j)-στοιχείο του οποίου είναι ίσο με $1/(i + j - 1)$ για $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

(α) Δείξτε ότι ο A_n είναι αντιστρέψιμος για κάθε n.

(β) Δείξτε ότι το $(1, 1)$-στοιχείο του αντίστροφου του A_n είναι ίσο με n^2 για κάθε n.

(γ) Υπολογίστε την ορίζουσα του A_n.

Πρόβλημα 5: Έστω συνάρτηση $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι η f είναι αύξουσα στο $[0, 1/2]$ και $f(1 - x) = f(x)$ για κάθε $x \in [0, 1]$. Αν $\phi : [0, 1] \to \mathbb{R}$ είναι κυρτή συνάρτηση, αποδείξτε ότι

$$\int_0^1 \phi(x)f(x)dx \leq \int_0^1 \phi(x)dx \cdot \int_0^1 f(x)dx.$$

Η διάρκεια της εξέτασης είναι 3 ώρες. **ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!**

Λύσεις

Πρόβλημα 1: Θεωρούμε τη συνάρτηση $g : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $g(x) = 1/f(x)$ για $x \geq 0$. Παρατηρούμε ότι

$$g'(x) \;=\; -\frac{f'(x)}{(f(x))^2} \;<\; 0, \qquad g''(x) \;=\; \frac{2(f'(x))^2 - f(x)f''(x)}{(f(x))^3} \;\geq\; 0$$

για κάθε $x \geq 0$. Θέλουμε να δείξουμε ότι $\lim_{x\to+\infty} g'(x) = 0$. Σύμφωνα με τα παραπάνω, η g' είναι αύξουσα και παίρνει αρνητικές τιμές στο διάστημα $[0, +\infty)$, οπότε υπάρχει το όριο $c = \lim_{x\to+\infty} g'(x)$ και $c \leq 0$. Αν ήταν $c < 0$, τότε θα είχαμε $g'(x) \leq c$ και $g(x) \leq cx + g(0)$ για κάθε $x \geq 0$, σε αντίθεση με την υπόθεση ότι $g(x) = 1/f(x) > 0$ για κάθε $x \geq 0$. Άρα, $c = 0$.

Πρόβλημα 2: Αν $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \geq 0$ οι ιδιοτιμές του θετικά ημιορισμένου πίνακα AA^t, τότε το αριστερό μέλος ισούται με

$$\det(AA^t) = \lambda_1 \cdots \lambda_n \leq \left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n}{n}\right)^n = \left(\frac{1}{n}\mathrm{tr}(AA^t)\right)^n.$$

Χρησιμοποιήσαμε την ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου. Τέλος, $\mathrm{tr}(AA^t) = \sum_{i,j=1}^n a_{i,j}^2$.

Πρόβλημα 3: Θεωρούμε το πολυώνυμο

$$p_n(x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{n+k+1} \binom{n}{k} x^{n+k+1}.$$

Υπολογίζουμε ότι $p_n'(x) = x^n(1-x)^n$ οπότε, επειδή $p_n(0) = 0$, παίρνουμε ότι το άθροισμα στο ερώτημα ισούται με

$$p_n(1) = \int_0^1 x^n(1-x)^n \, dx.$$

Έπειτα, παρατηρούμε ότι $x(1-x) \leq 1/4$ για κάθε $x \in [0, 1]$ και $x(1-x) \geq (1/4)(1-1/4) = 3/16$ για κάθε $x \in [1/4, 3/4]$.

Σημείωση: Υπολογίζοντας το ολοκλήρωμα, ή εφαρμόζοντας τον αναδρομικό τύπο για τους διωνυμικούς συντελεστές, μπορεί να δείξει κανείς ότι $p_n(1) = (n!)^2/(2n+1)!$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Πρόβλημα 4: Για το (α), ας υποθέσουμε ότι το ομογενές γραμμικό σύστημα $A_n \cdot x = 0$ έχει μια μη μηδενική λύση $x = (\lambda_1 \; \lambda_2 \; \cdots \; \lambda_n)^t \in \mathbb{R}^n$. Τότε, θέτοντας

$$f(x) \;:=\; \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{x+i},$$

έχουμε $f(0) = f(1) = \cdots = f(n-1) = 0$. Θέτουμε

$$p(x) \;:=\; (x+1)(x+2)\cdots(x+n) \;\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{x+i}$$

και παρατηρούμε ότι το $p(x)$ είναι μη μηδενικό πολυώνυμο βαθμού μικρότερου του n με n διακεκριμένες ρίζες, τις $0, 1, \ldots, n-1$. Αυτή η αντίφαση δείχνει ότι το σύστημα $A_n \cdot x = 0$ έχει μόνο τη μηδενική λύση ή, ισοδύναμα, ότι ο πίνακας A_n είναι αντιστρέψιμος.

Για τα (β) και (γ) ακολουθούμε παρόμοιο σκεπτικό. Τα στοιχεία, έστω $c_{ij}(n)$, του αντίστροφου πίνακα του A_n ορίζονται από το σύστημα των εξισώσεων

$$\sum_{k=1}^{n} c_{kj}(n)/(i+k-1) \;=\; \begin{cases} 1, & \text{αν } i=j, \\ 0, & \text{αν } i \neq j \end{cases}$$

για $1 \le i, j \le n$. Θεωρούμε το $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ σταθερό και ορίζουμε τις συναρτήσεις $f_j(x)$ και $p_j(x)$ από τους τύπους

$$f_j(x) \;=\; \sum_{k=1}^{n} c_{kj}(n)/(x+k-1)$$

και $p_j(x) = x(x+1)\cdots(x+n-1)f_j(x)$. Οι παραπάνω εξισώσεις για τα $c_{ij}(n)$ γράφονται, ισοδύναμα, ως

$$f_j(i) \;=\; \begin{cases} 1, & \text{αν } i=j, \\ 0, & \text{αν } i \neq j \end{cases}$$

για $1 \le i \le n$, ή ως

$$p_j(i) \;=\; \begin{cases} \frac{(n+j-1)!}{(j-1)!}, & \text{αν } i=j, \\ 0, & \text{αν } i \neq j \end{cases}$$

για $1 \le i \le n$. Ως πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού μικρότερου του n, η $p_j(x)$ υπολογίζεται εύκολα από τα παραπάνω δεδομένα ως

$$p_j(x) \;=\; \frac{(-1)^{n-j}\,(n+j-1)!}{((j-1)!)^2\,(n-j)!}\,\prod_{i \neq j}(x-i).$$

Κατά συνέπεια,

$$\sum_{k=1}^{n} c_{kj}(n)/(x+k-1) \;=\; \frac{1}{x(x+1)\cdots(x+n-1)} \cdot \frac{(-1)^{n-j}\,(n+j-1)!}{((j-1)!)^2\,(n-j)!}\,\prod_{i \neq j}(x-i)$$

για $1 \le j \le n$. Πολλαπλασιάζοντας την ισότητα αυτή με $x+i-1$ και θέτοντας $x = -i+1$ προκύπτει ο τύπος

$$c_{ij}(n) \;=\; \frac{(-1)^{i+j}}{i+j-1} \cdot \frac{(n+j-1)!\,(n+j-1)!}{((i-1)!)^2((j-1)!)^2\,(n-i)!(n-j)!}$$

για $1 \le i, j \le n$. Ειδικότερα, $c_{11}(n) = n^2$ και

$$c_{nn}(n) \;=\; (2n-1)\binom{2n-2}{n-1}^2$$

για κάθε n. Τέλος, παρατηρούμε ότι ο (n,n)-συμπαράγοντας του A_n ισούται με $\det(A_{n-1})$, οπότε $c_{nn}(n) = \det(A_{n-1})/\det(A_n)$ και συνεπώς

$$\det(A_n) \;=\; \left(\prod_{k=2}^{n} c_{kk}(k)\right)^{-1} \;=\; \left(\prod_{k=1}^{n} (2k-1)\binom{2k-2}{k-1}^2\right)^{-1}$$

για κάθε n.

Πρόβλημα 5: Χρησιμοποιώντας την υπόθεση $f(x) = f(1-x)$ και την αλλαγή μεταβλητής $x = 1-y$ στο $[1/2, 1]$ γράφουμε

$$\int_0^1 \phi(x)f(x)dx = \int_0^{1/2} \phi(x)f(x)dx + \int_0^{1/2} \phi(1-x)f(x)dx = \int_0^{1/2} g(x)f(x)dx,$$

όπου $g(x) = \phi(x) + \phi(1-x)$. Από την κυρτότητα της ϕ έπεται ότι η g είναι φθίνουσα στο $[0, 1/2]$. Και εφόσον η f είναι αύξουσα στο $[0, 1/2]$, η ανισότητα Chebyshev δίνει ότι

$$\int_0^{1/2} g(x)f(x)dx \leq 2\int_0^{1/2} g(x)dx \cdot \int_0^{1/2} f(x)dx = \int_0^1 \phi(x)dx \cdot \int_0^1 f(x)dx.$$

Η ισότητα έπεται από την $f(x) = f(1-x)$ για κάθε $x \in [0, 1]$.