Προβλήματα για το διαγωνισμό επιλογής της ΕΜΕ για τη Μαθηματική Ολυμπιάδα πρωτοετών και δευτεροετών φοιτητών

20 Μαρτίου 2021

Πρόβλημα 1: Δίνεται τετραγωνικός πίνακας $A = (a_{ij})$ με στοιχεία πραγματικούς αριθμούς, τέτοια ώστε $a_{ij} = 1$ για $i \geq j$ και $0 \leq a_{ij} \leq 1$ για $i < j$. Δείξτε ότι $0 \leq \det(A) \leq 1$.

Πρόβλημα 2: Δίνεται η δυναμοσειρά

$$f(x) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2n+1}, \qquad |x| < 1.$$

Δείξτε ότι

$$f\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) \;=\; (1+x^2) f(x)$$

για $|x| < 1$.

Πρόβλημα 3: Για θετικούς ακεραίους n, r ορίζουμε τα $a_{n,r,k} \in \mathbb{N}$ από την ισότητα

$$(1 + x + x^2 + \cdots + x^{r-1})^n \;=\; \sum_{k \geq 0} a_{n,r,k}\, x^k,$$

όπου $a_{n,r,k} = 0$ για $k > (r-1)n$ και $\mathbb{N} := \{0, 1, 2, \ldots\}$. Χρησιμοποιώντας τη θεωρία των συστημάτων γραμμικών εξισώσεων, ή με άλλο τρόπο, δείξτε ότι

$$\sum_{q \in \mathbb{N}} a_{n,r,qr+i} \;=\; r^{n-1}$$

για κάθε $i \in \{0, 1, \ldots, r-1\}$.

Πρόβλημα 4: Έστω διπλά συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$. Αν υπάρχει $\alpha > 0$ τέτοιο ώστε $f(x) \geq \alpha$ για κάθε $x \geq 0$ και

$$\int_0^{\infty} |f''(t)|\, dt \;<\; \infty,$$

δείξτε ότι

$$\int_0^{\infty} \frac{(f'(t))^2}{(f(t))^{2021}}\, dt \;<\; \infty.$$

Πρόβλημα 5: Δίνονται οι ακολουθίες $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ και $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ φυσικών αριθμών που ορίζονται αναδρομικά από τις ισότητες $a_n = a_{n-1} + (n-1)^2 a_{n-2}$ και $b_n = b_{n-1} + (n-1)^2 b_{n-2}$ για $n \geq 2$ και τις αρχικές συνθήκες $a_0 = b_0 = 1$, $a_1 = 0$ και $b_1 = 1$. Υπολογίστε το όριο $\lim_{n\to\infty}(a_n/b_n)$.

Η διάρκεια της εξέτασης είναι 3 ώρες. **ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!**

Λύσεις

Πρόβλημα 1: Έστω ότι ο πίνακας A είναι $n \times n$, όπου $n \geq 2$. Αφαιρώντας την τελευταία γραμμή του A από καθεμιά από τις υπόλοιπες γραμμές και αναπτύσσοντας την ορίζουσα του πίνακα που προκύπτει ως προς την πρώτη στήλη καταλήγουμε (εξηγήστε πώς) στον τύπο $\det(A) = \prod_{i=1}^{n-1}(1 - a_{i\,i+1})$, από όπου το ζητούμενο είναι φανερό.

Πρόβλημα 2: Από τη βασική ταυτότητα $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\log(1-x)$ παίρνουμε

$$g(x) \;:=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} \;=\; -\frac{\log(1-x)}{x}$$

και συμπεραίνουμε ότι

$$f(x) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2n+1} \;=\; \frac{g(x)+g(-x)}{2} \;=\; \frac{1}{2x}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right),$$

από όπου εύκολα προκύπτει η ζητούμενη συναρτησιακή εξίσωση για την $f(x)$.

Πρόβλημα 3: Θέτουμε $\sigma_{n,r}(i) := \sum_{q\in\mathbb{N}} a_{n,r,qr+i}$ για $i \in \{0,1,\ldots,r-1\}$ και θεωρούμε την πρωταρχική r-στή ρίζα της μονάδος ζ. Θέτοντας $x = \zeta^j$ στην ταυτότητα που ορίζει τα $a_{n,r,k}$ βρίσκουμε ότι

$$\sum_{i=0}^{r-1} \sigma_{n,r}(i)\,\zeta^{ij} \;=\; \begin{cases} r^n, & \text{αν} \quad j = 0, \\ 0, & \text{αν} \quad j \in \{1,2,\ldots,r-1\}. \end{cases}$$

Θεωρούμε τις εξισώσεις αυτές ως ένα σύστημα r γραμμικών εξισώσεων στους r αγνώστους $\sigma_{n,r}(i)$. Παρατηρούμε ότι το σύστημα έχει μη μηδενική ορίζουσα Vandermonde και συνεπώς μοναδική λύση. Αφού η $\sigma_{n,r}(i) = r^{n-1}$ για $i \in \{0,1,\ldots,r-1\}$ είναι μια λύση (εξηγήστε γιατί), έπεται το ζητούμενο.

Πρόβλημα 4: Παρατηρούμε ότι για $x, y \geq 0$

$$|f'(x) - f'(y)| \;=\; \left|\int_x^y f''(t)\,dt\right| \;\leq\; \int_x^y |f''(t)|\,dt.$$

Από αυτό, την υπόθεση ότι $\int_0^\infty |f''(t)|\,dt < \infty$ και το κριτήριο του Cauchy έπεται ότι υπάρχει το $\lim_{x\to\infty} f'(x)$ και συνεπώς ότι η f' είναι φραγμένη στο $[0,\infty)$. Αφού η $1/f$ είναι επίσης φραγμένη σε αυτό το διάστημα, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\int_0^\infty \frac{(f'(t))^2}{(f(t))^2}\,dt \;<\; \infty.$$

Πράγματι, για $y \geq 0$

$$\begin{aligned}
\int_0^y \frac{(f'(t))^2}{(f(t))^2}\,dt \;&=\; \int_0^y \left(\frac{(f'(t))^2 - f(t)f''(t)}{(f(t))^2} \;+\; \frac{f''(t)}{f(t)}\right)dt \\
&=\; \int_0^y \left(-\frac{f'(t)}{f(t)}\right)' dt \;+\; \int_0^y \frac{f''(t)}{f(t)}\,dt \\
&=\; \frac{f'(0)}{f(0)} - \frac{f'(y)}{f(y)} \;+\; \int_0^y \frac{f''(t)}{f(t)}dt.
\end{aligned}$$

Αφού οι f' και $1/f$ είναι φραγμένες στο $[0,\infty)$ και $\int_0^\infty |f''(t)|\,dt < \infty$, έπεται το ζητούμενο.

Πρόβλημα 5: Παρατηρούμε ότι η ισότητα $a_n = a_{n-1} + (n-1)^2 a_{n-2}$ γράφεται ισοδύναμα

$$a_n - n a_{n-1} \;=\; -(n-1)(a_{n-1} - (n-1)a_{n-2}).$$

Από αυτήν, με επαγωγή στο n προκύπτει ότι

$$a_n - n a_{n-1} \;=\; (a_1 - a_0)\,(-1)^{n-1}(n-1)! \;=\; (-1)^n (n-1)!$$

για κάθε $n \geq 1$. Ομοίως, αφού $b_1 - b_0 = 0$, βρίσκουμε ότι $b_n - n b_{n-1} = 0$ για κάθε $n \geq 1$ και συνεπώς ότι $b_n = n!$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επομένως, για $n \geq 1$,

$$\frac{a_n}{b_n} \;=\; \frac{n a_{n-1} \,+\, (-1)^n (n-1)!}{b_n} \;=\; \frac{a_{n-1}}{b_{n-1}} \,+\, \frac{(-1)^n}{n},$$

από όπου έπεται ότι

$$\frac{a_n}{b_n} \;=\; 1 - \frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \cdots + \frac{(-1)^n}{n}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επομένως, το ζητούμενο όριο είναι το άπειρο άθροισμα $1 - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}/n = 1 - (1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + \cdots) = 1 - \log(2)$.