Seemous 2020 25 Ιανουαρίου 2020

Πρόβλημα 1: Εξετάστε αν υπάρχουν πίνακες $A \in \mathbb{R}^{n,m}$ και $B \in \mathbb{R}^{m,n}$ με $n > m$, ώστε $AB = \mathbb{I}_n$.

Πρόβλημα 2:
Δίνονται οι πίνακες

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & \vdots \\ 1 & 2 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ \binom{n}{0} & \binom{n}{1} & \cdots & \binom{n}{n-1} & \binom{n}{n} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \ddots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Αποδείξτε ότι υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας Q με $QAQ^{-1} = B$.

Πρόβλημα 3: Έστω $f : \mathbb{R}^+ \to [0,1]$ μία συνεχής συνάρτηση και $n \geqslant 2$. Αν $\beta := \int_0^\infty t^{n-1} f(t)\,dt < \infty$ και θέσουμε $\alpha = (n\beta)^{1/n}$ τότε για κάθε συνάρτηση $\phi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ ώστε $\phi(b) \geq \phi(a)$ για κάθε $b > a$ έχουμε

$$\int_0^\infty t^{n-1}\phi(t) f(t)\,dt \geqslant \int_0^\alpha t^{n-1}\phi(t)\,dt.$$

Πρόβλημα 4: Έστω $f : \mathbb{R} \to [0,1]$ συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι η συνάρτηση

$$F(p) = \left(\frac{\int_{\mathbb{R}} |x|^p f(x) dx}{\int_{-1}^{1} |x|^p dx} \right)^{1/(p+1)}$$

είναι αύξουσα για $p \in (-1, \infty)$.
Πρόβλημα 5: Να αποδειχθεί ότι για $(a, m) = 1$ ότι

$$\sum_{x=0}^{m-1} \left[\frac{ax+b}{m} \right] = \frac{(a-1)(m-1)}{2} + b$$

Η διάρκεια της εξέτασης είναι 3 ώρες. **ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!**

Λύσεις

Πρόβλημα 1: Δεν υπάρχουν τέτοιοι πίνακες αφού οι επαγώμενη γραμμική συνάρτηση $f_B : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ δεν είναι 1-1 και η $f_A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ δεν είναι επί.

Πρόβλημα 2:

Θεωρήστε τον γραμμικό χώρο των πολυωνύμων βαθμού $\leq n$ και χρησιμοποιήστε τις βάσεις $\{1, x, \ldots, x^n\}$ και $\{\binom{x}{\nu}, 0 \leq \nu \leq n\}$. Στην συνέχεια θεωρείστε την γραμμική απεικόνιση που στέλνει το πολυώνυμο $f(x)$ στο πολυώνυμο $f(x+1)$ ως προς τις δύο διαφορετικές βάσεις.

Πρόβλημα 3:

Υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}\int_0^\infty t^{n-1}\phi(t)f(t)dt &= \int_0^\alpha t^{n-1}\phi(t)f(t)dt + \int_\alpha^\infty t^{n-1}\phi(t)f(t)dt \\ &\geqslant \int_0^\alpha t^{n-1}\phi(t)f(t)dt + \phi(\alpha)\int_\alpha^\infty t^{n-1}f(t)dt\end{aligned}$$

Διαλέξαμε το α με τέτοιο τρόπο ώστε $\int_0^\infty t^{n-1}f(t)dt = \int_0^\alpha t^{n-1}dt$, συνεπώς

$$\begin{aligned}&\int_0^\alpha t^{n-1}\phi(t)f(t)dt + \phi(\alpha)\int_\alpha^\infty t^{n-1}f(t)dt \\ &= \int_0^\alpha t^{n-1}\phi(t)f(t)dt + \phi(\alpha)\int_0^\alpha t^{n-1}(1-f(t))dt \\ &\geqslant \int_0^\alpha t^{n-1}\phi(t)f(t)dt + \int_0^\alpha t^{n-1}\phi(t)(1-f(t))dt \\ &= \int_0^\alpha t^{n-1}\phi(t)dt.\end{aligned}$$

Πρόβλημα 4: Για κάθε $p > q$ και $t > 0$, έχουμε

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} |x|^p f(x)\,dx &\geqslant \int_{\mathbb{R}} t^{p-q}|x|^q f(x)\,dx - \int_{|x|\leqslant t} (t^{p-q}|x|^q - |x|^p) f(x)\,dx \\ &\geq t^{p-q}\int_{\mathbb{R}} |x|^q f(x)\,dx - \int_{-t}^{t} (t^{p-q}|x|^q - |x|^p)\,dx \\ &= t^{p-q}\int_{\mathbb{R}} |x|^q f(x)\,dx - t^{p+1}\int_{-1}^{1} (|x|^q - |x|^p)dx \\ &= t^{p-q}\int_{\mathbb{R}} |x|^q f(x)\,dx - t^{p+1}\,\frac{2(p-q)}{(p+1)(q+1)}.\end{aligned}$$

Βελτιστοποιούμε την τελευταία ανισότητα για $t \in \mathbb{R}^+$, θέτοντας

$$t = \Big(\frac{q+1}{2}\int_{\mathbb{R}} |x|^q f(x)\,dx\Big)^{1/(q+1)},$$

και καταλήγουμε στην επιθυμητή ανισότητα.

Πρόβλημα 5: Αποδείξτε ότι οι αριθμοί $ax + b$ αποτελούν ένα πλήρες σύστημα αντιπροσώπων κλάσεων modulo m. Κάντε χρήση του ότι το πηλίκο της διαίρεσης του a με το m είναι το $\left[\frac{a}{m}\right]$ και χρησιμοποιείστε τον τύπο αθροίσματος αριθμητικής προόδου.