# Προβλήματα για το διαγωνισμό επιλογής της ΕΜΕ για τη Μαθηματική Ολυμπιάδα πρωτοετών και δευτεροετών φοιτητών

26 Ιανουαρίου 2019

**Πρόβλημα 1:** Δείξτε ότι υπάρχουν άπειρου πλήθους θετικοί πραγματικοί αριθμοί $x$ για τους οποίους το άπειρο άθροισμα $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+x}$ είναι ρητός αριθμός.

**Πρόβλημα 2:** Έστω $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ το σύνολο των $n \times n$ πινάκων $A$ με στοιχεία πραγματικούς αριθμούς που έχουν την εξής ιδιότητα: υπάρχει μη μηδενικό πολυώνυμο $p(t)$ με μη αρνητικούς πραγματικούς συντελεστές, τέτοιο ώστε $p(A) = O$. Έστω $\mathcal{Q}_n(\mathbb{R})$ το σύνολο των $n \times n$ συμμετρικών πινάκων με στοιχεία πραγματικούς αριθμούς.

(α) Για ποια $n$ ισχύει ότι $A, B \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R}) \Rightarrow A + B \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$;

(β) Για ποια $n$ ισχύει ότι $A, B \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{Q}_n(\mathbb{R}) \Rightarrow A + B \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{Q}_n(\mathbb{R})$;

**Πρόβλημα 3:** Δίνονται $a, b \in \mathbb{R}$ με $a < b$. Για ποια $c \in \mathbb{R}$ υπάρχει συνεχής αύξουσα συνάρτηση $f : [a, b] \to [0, +\infty)$, όχι ταυτοτικά ίση με μηδέν, για την οποία

$$\int_a^b (x-a)f(x)^2 \, dx \;=\; c\left(\int_a^b f(x)\, dx\right)^2 ;$$

**Πρόβλημα 4:** Για ποια $p \in \mathbb{Q}$ υπάρχει $3 \times 3$ πίνακας $X$ με στοιχεία ρητούς αριθμούς, τέτοιος ώστε

$$X^2 \;=\; \begin{pmatrix} p & 1 & 1 \\ 1 & p & 1 \\ 1 & 1 & p \end{pmatrix};$$

**Πρόβλημα 5:** Θεωρούμε $n \times n$ πίνακες $P, A$ με στοιχεία ακέραιους αριθμούς, τέτοιους ώστε $\det(P) \neq 0$ και $\det(A) = 1$, και θέτουμε $B = P^{-1}AP$. Δείξτε ότι υπάρχει θετικός ακέραιος $k$ για τον οποίο όλα τα στοιχεία του πίνακα $B^k$ είναι ακέραιοι αριθμοί.

**Η διάρκεια της εξέτασης είναι 3 ώρες.** **ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!**

# Λύσεις

**Πρόβλημα 1:** Έστω $f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+x}$ για $x \ge 0$. Παρατηρούμε ότι

$$\left| \sum_{n=m}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+x} \right| \;\le\; \frac{1}{m+x} \;\le\; \frac{1}{m}$$

για κάθε θετικό ακέραιο $m$ και κάθε $x \ge 0$. Από αυτό συμπεραίνουμε ότι η $f(x)$ συγκλίνει ομοιόμορφα, και επομένως ότι είναι συνεχής, στο κλειστό διάστημα $[0, \infty)$. Αφού $f(0) = \ln(2)$ και $f(1) = 1 - \ln(2) \ne f(0)$, το ζητούμενο προκύπτει από το θεώρημα της μέσης τιμής για την $f$.

**Πρόβλημα 2:** Ισχυριζόμαστε ότι για συμμετρικούς πίνακες $A$ έχουμε $A \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ αν και μόνο αν ο $A$ είναι αρνητικά ημιορισμένος, δηλαδή $x^t A x \le 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^{n\times 1}$. Από αυτό προκύπτει άμεσα ότι το (β) ισχύει για κάθε $n \ge 1$.

Για να επαλήθεύσουμε τον ισχυρισμό, έστω συμμετρικός πίνακας $A \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$. Τότε $p(A) = O$ για κάποιο μη μηδενικό πολυώνυμο $p(t)$ με μη αρνητικούς συντελεστές και ο $A$ δεν έχει θετικές ιδιοτιμές, αφού για κάθε ιδιοτιμή $\lambda$ του $A$ το $p(\lambda)$ είναι ιδιοτιμή του $p(A)$ και συνεπώς $p(\lambda) = 0$. Άρα, όλες οι ιδιοτιμές του $A$ είναι μη θετικές και επομένως ο $A$ είναι αρνητικά ημιορισμένος. Αντιστρόφως, έστω ότι ο $A$ είναι συμμετρικός και αρνητικά ημιορισμένος. Τότε, ο $A$ έχει μόνο πραγματικές μη θετικές ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ και το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\det(tI - A) = (t - \lambda_1)(t - \lambda_2) \cdots (t - \lambda_n)$ έχει μη αρνητικούς συντελεστές. Αφού το πολυώνυμο αυτό είναι μονικό και μηδενίζει τον $A$, έχουμε $A \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$. Το (α) ισχύει μόνο για $n = 1$. Για $n = 2$ αρκεί να θέσει κανείς

$$A \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Τότε $A, B \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, αφού $A^2 = B^2 = O$, αλλά ο $A + B$ προφανώς δεν ανήκει στο $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

**Πρόβλημα 3:** Θεωρώντας συναρτήσεις της μορφής $f(x) = (x - a)^\delta$ με $\delta \ge 0$ βρίσκουμε ότι για κάθε $c \ge 1/2$ υπάρχει τέτοια συνάρτηση. Αντιστρόφως, αν η $f : [a, b] \to [0, +\infty)$ έχει τις δοσμένες ιδιότητες, θα δείξουμε ότι

$$\int_a^b (x - a) f(x)^2 \, dx \;\ge\; \frac{1}{2} \left( \int_a^b f(x) \, dx \right)^2,$$

οπότε αναγκαστικά $c \ge 1/2$. Παρατηρούμε πρώτα ότι

$$\left( \int_a^b f(x) \, dx \right)^2 \;=\; \int_a^b \int_a^b f(x) f(y) \, dx \, dy.$$

Χωρίζουμε έπειτα το τετράγωνο $[a, b] \times [a, b]$ σε δύο τρίγωνα, φέρνοντας τη διαγώνιο που ενώνει τις κορυφές $(a, a)$ και $(b, b)$. Αφού τα ολοκληρώματα της $f(x)f(y)$ επί των δύο τριγώνων είναι ίσα μεταξύ τους και ισχύει $f(y) \le f(x)$ για $y \le x$, συμπεραίνουμε ότι

$$\begin{aligned} \left( \int_a^b f(x) \, dx \right)^2 \;&=\; 2 \int_a^b \int_a^x f(x) f(y) \, dy \, dx \;\le\; 2 \int_a^b \int_a^x f(x)^2 \, dy \, dx \\ &=\; 2 \int_a^b (x - a) f(x)^2 \, dx. \end{aligned}$$

**Πρόβλημα 4:** Θα δείξουμε ότι τέτοιος πίνακας υπάρχει αν και μόνο αν $p = q^2 - 2$ για κάποιο ρητό αριθμό $q$. Πράγματι, εξισώνοντας τις ορίζουσες στη δοσμένη ισότητα βρίσκουμε ότι $(\det(X))^2 = (p+2)(p-1)^2$ και συμπεραίνουμε ότι θα πρέπει είτε $p = 1$, είτε το $p+2$ να είναι τετράγωνο ρητού αριθμού. Αντιστρόφως, έστω ότι $p + 2 = q^2$ με $q \in \mathbb{Q}$. Διαγωνοποιώντας το δοσμένο πίνακα

$$A \; := \; \begin{pmatrix} p & 1 & 1 \\ 1 & p & 1 \\ 1 & 1 & p \end{pmatrix}$$

επί του $\mathbb{Q}$ βρίσκουμε ότι $A = P \Delta P^{-1}$, όπου

$$\Delta \; = \; \begin{pmatrix} p+2 & 0 & 0 \\ 0 & p-1 & 0 \\ 0 & 0 & p-1 \end{pmatrix}, \quad P \; = \; \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Έπειτα βρίσκουμε μια τετραγωνική ρίζα του $\Delta$ στο $\mathbb{Q}^{3 \times 3}$, για παράδειγμα τη

$$\Gamma \; = \; \begin{pmatrix} q & 0 & 0 \\ 0 & 1 & p-2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

και επαληθεύουμε ότι για $X = P \Gamma P^{-1} \in \mathbb{Q}^{3 \times 3}$ έχουμε $X^2 = P \Gamma^2 P^{-1} = P \Delta P^{-1} = A$.

Για $p = 1$, παρατηρούμε ότι ο $A$ έχει ιδιοτιμές 0, 0 και 3. Κάθε πίνακας $X \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$ με $X^2 = A$ έχει ιδιοτιμές 0, 0 και $\pm\sqrt{3}$ και συνεπώς ίχνος που δεν είναι ρητός αριθμός, οπότε $X \notin \mathbb{Q}^{3 \times 3}$.

**Πρόβλημα 5:** Από το γνωστό τύπο για τον αντίστροφο πίνακα προκύπτει ότι ο $P^{-1}$ είναι πίνακας με στοιχεία ρητούς αριθμούς. Άρα, $P^{-1} = \frac{1}{m} Q$ για κάποιο θετικό ακέραιο $m$ και κάποιον $n \times n$ πίνακα $Q$ με στοιχεία ακέραιους αριθμούς. Ασφαλώς, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $m \geq 2$. Αφού $\det(A) = 1$, με αναγωγή των στοιχείων του modulo $m$, ο $A$ μπορεί να θεωρηθεί στοιχείο της ομάδας των αντιστρέψιμων $n \times n$ πινάκων με στοιχεία από το $\mathbb{Z}_m$. Αφού η ομάδα αυτή είναι πεπερασμένη, ο $A$ έχει πεπερασμένη τάξη. Αυτό σημαίνει ότι $A^k = I + mC$ για κάποιο θετικό ακέραιο $k$ και κάποιον $n \times n$ πίνακα $C$ με στοιχεία ακέραιους αριθμούς. Αφού

$$B^k \; = \; P^{-1} A^k P \; = \; P^{-1}(I + mC)P \; = \; I + P^{-1}(mC)P \; = \; I + QCP,$$

ο $B^k$ είναι πίνακας με στοιχεία ακέραιους αριθμούς.