Προβλήματα για το διαγωνισμό επιλογής της ΕΜΕ για τη Μαθηματική Ολυμπιάδα πρωτοετών και δευτεροετών φοιτητών

23 Ιανουαρίου 2016

Πρόβλημα 1: Δίνεται πρώτος αριθμός p και ο $(p-1)\times(p-1)$ πίνακας $A=(a_{ij})$ με στοιχεία $a_{ij}=1$ για $j=i$ ή $j=i+1$ και $a_{ij}=0$ διαφορετικά. Δείξτε ότι ο πίνακας $I+A+A^2+\cdots+A^{p-1}$ έχει στοιχεία ακεραίους αριθμούς διαιρετούς με p.

Πρόβλημα 2: Βρείτε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει

$$\int_0^x f(t)dt \;=\; \int_0^{x/3} f(t)dt \;+\; \int_0^{2x/3} f(t)dt$$

για κάθε $x\in[0,1]$.

Πρόβλημα 3: Βρείτε όλους τους θετικούς ακεραίους n που έχουν την εξής ιδιότητα: αν $A=(a_{ij})$ είναι $n\times n$ πίνακας με στοιχεία μη μηδενικούς πραγματικούς αριθμούς, τότε είναι δυνατόν να πολλαπλασιάσουμε κάθε στοιχείο a_{ij} του A με κάποιον θετικό πραγματικό αριθμό b_{ij} έτσι ώστε ο πίνακας που θα προκύψει να έχει ορίζουσα μηδέν.

Πρόβλημα 4: Βρείτε τους θετικούς ακεραίους n για τους οποίους $\sum_{k=1}^{n}(k+2)^n=(n+3)^n$.

Η διάρκεια της εξέτασης είναι 3 ώρες. **ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!**

Λύσεις

Πρόβλημα 1: Θέτουμε $N = A - I$, παρατηρούμε ότι $N^{p-1} = O$ και υπολογίζουμε ότι

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{p-1} A^j &= \sum_{j=0}^{p-1} (I+N)^j = \sum_{j=0}^{p-1}\sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} N^i = \sum_{i=0}^{p-1}\sum_{j=i}^{p-1} \binom{j}{i} N^i \\ &= \sum_{i=0}^{p-1} \binom{p}{i+1} N^i = \sum_{i=0}^{p-2} \binom{p}{i+1} N^i,\end{aligned}$$

όπου έχουμε χρησιμοποιήσει την ταυτότητα $\sum_{j=i}^{p-1} \binom{j}{i} = \binom{p}{i+1}$. Το ζητούμενο προκύπτει από το γεγονός ότι οι διωνυμικοί συντελεστές $\binom{p}{i}$ διαιρούνται με το p για $1 \le i \le p-1$.

Πρόβλημα 2: Θα δείξουμε ότι οι μόνες συναρτήσεις με τις δοσμένες ιδιότητες είναι οι σταθερές. Παραγωγίζοντας την ισότητα που δόθηκε βρίσκουμε ότι

$$f(x) = \frac{1}{3} f(\frac{x}{3}) + \frac{2}{3} f(\frac{2x}{3})$$

για κάθε $x \in [0,1]$. Έστω x_0 σημείο στο οποίο η f λαμβάνει τη μέγιστη τιμή της $f(x_0) = a$ στο κλειστό διάστημα $[0,1]$. Τότε

$$a = f(x_0) = \frac{1}{3} f(\frac{x_0}{3}) + \frac{2}{3} f(\frac{2x_0}{3}) \le \frac{a}{3} + \frac{2a}{3} = a$$

και συνεπώς $f(x_0/3) = a$. Άρα η f λαμβάνει τη μέγιστη τιμή της επίσης στο $x_0/3$. Με επαγωγή στο n βρίσκουμε ότι η f λαμβάνει τη μέγιστη τιμή της στο $x_0/3^n$ για κάθε φυσικό αριθμό n. Αφού η f είναι συνεχής, θα πρέπει να λαμβάνει τη μέγιστη τιμή της και στο $\lim_{n\to\infty} x_0/3^n = 0$. Με εντελώς παρόμοιο τρόπο δείχνουμε ότι η f λαμβάνει και την ελάχιστη τιμή της στο μηδέν και συμπεραίνουμε ότι η f είναι σταθερή συνάρτηση.

Πρόβλημα 3: Εύκολα αποκλείονται οι περιπτώσεις $n = 1$ και $n = 2$. Θα δείξουμε ότι κάθε ακέραιος $n \ge 3$ έχει την ιδιότητα της άσκησης. Θεωρούμε τις στήλες του πίνακα A ως διανύσματα $v_1, v_2, \ldots, v_n$ στο χώρο $\mathbb{R}^{n\times 1}$ και για κάθε $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n) \in \{-1,1\}^n$ θεωρούμε το υποσύνολο

$$\Omega_\varepsilon = \{ (x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n)^t \in \mathbb{R}^{n\times 1} : \ \varepsilon_1 x_1 > 0, \varepsilon_2 x_2 > 0, \ldots, \varepsilon_n x_n > 0 \}$$

του $\mathbb{R}^{n\times 1}$. Παρατηρούμε ότι κάθε διάνυσμα v_i ανήκει σε ακριβώς ένα, έστω το Ω_i, από αυτά τα υποσύνολα και ότι ο πολλαπλασιασμός των στοιχείων του A με τυχαίους θετικούς πραγματικούς αριθμούς ισοδυναμεί με την αντικατάσταση κάθε διανύσματος v_i με τυχαίο στοιχείο του συνόλου Ω_i στο οποίο το v_i ανήκει. Κατά συνέπεια, αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχουν γραμμικώς εξαρτημένα διανύσματα $u_1, u_2, \ldots, u_n$ του $\mathbb{R}^{n\times 1}$ τέτοια ώστε $u_i \in \Omega_i$ για κάθε i. Αφού υπάρχουν ακριβώς 2^n σύνολα της μορφής Ω_ε και $n \ge 3$, οπότε $2^{n-1} > n$, υπάρχει $\varepsilon \in \{-1,1\}^n$ για το οποίο το Ω_ε και το αντίθετό του $-\Omega_\varepsilon$ δεν περιλαμβάνονται ανάμεσα στα $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_n$. Τότε, το γραμμικό υπερεπίπεδο H του $\mathbb{R}^{n\times 1}$ που είναι ορθογώνιο σε τυχαίο διάνυσμα του Ω_ε τέμνει μη προφανώς καθένα από τα $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_n$. Επιλέγοντας τυχαίο $u_i \in H \cap \Omega_i$ για $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ έχουμε γραμμικώς εξαρτημένα διανύσματα $u_1, u_2, \ldots, u_n$ με τις επιθυμητές ιδιότητες.

Πρόβλημα 4: Οι μόνες λύσεις είναι οι $n = 2$ και $n = 3$, όπου $3^2 + 4^2 = 5^2$ και $3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$. Οι υπόλοιπες τιμές του $n \le 5$ μπορούν να ελεγχθούν ξεχωριστά, ενώ για $n \ge 6$ μπορεί να δειχθεί ότι

$$\sum_{k=1}^{n} (k+2)^n < \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots \right) (n+3)^n = (n+3)^n$$

με συνήθεις μεθόδους απειροστικού λογισμού.