Προβλήματα για το διαγωνισμό επιλογής της ΕΜΕ για τη Μαθηματική Ολυμπιάδα πρωτοετών και δευτεροετών φοιτητών

8 Φεβρουαρίου 2014

Πρόβλημα 1: Δίνεται η συνάρτηση $f : (0,1) \to [0,1)$ με τύπο $f(x) = \frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x}\right]$, όπου με $[x]$ συμβολίζουμε το μεγαλύτερο ακέραιο που είναι μικρότερος ή ίσος του x. Δείξτε ότι:

(α) Τα σημεία $x \in (0,1)$ με $f(x) = x$ (δηλαδή τα σταθερά σημεία της f) σχηματίζουν μια ακολουθία $(x_n)_{n\geq 1}$ με $1/(n+1) < x_n < 1/n$ για $n \geq 1$.

(β) Για κάθε συνεχή συνάρτηση $g : [0,1) \to (0,1)$ ισχύει

$$\int_{(0,1)} g(f(x))\,\frac{dx}{1+x} \;=\; \int_{(0,1)} g(x)\,\frac{dx}{1+x}.$$

Πρόβλημα 2: Δίνεται πολυώνυμο $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_{2n}x^{2n}$ άρτιου βαθμού με πραγματικούς συντελεστές για τους οποίους ισχύει $a_i \geq 0$ και $a_i = a_{2n-i}$ για $0 \leq i \leq 2n$ και $a_0 = 1$. Αν κάθε ρίζα του $p(x)$ είναι πραγματικός αριθμός, δείξτε ότι $(-1)^n \sum_{i=0}^{2n} (-1)^i a_i \geq 0$.

Πρόβλημα 3: Συμβολίζουμε με V_n τον πραγματικό διανυσματικό χώρο διάστασης 2^n μια βάση του οποίου είναι το σύνολο όλων των υποσυνόλων του συνόλου $[n] := \{1, 2, \ldots, n\}$. Θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση $\varphi_n : V_n \to V_n$ που ορίζεται θέτοντας

$$\varphi_n(S) \;=\; \sum_{T \subseteq [n]} (-1)^{|S\cap T|} \cdot T$$

για κάθε $S \subseteq [n]$. Για παράδειγμα, για $n = 2$ έχουμε $\varphi_n(\{1,2\}) = \varnothing - \{1\} - \{2\} + \{1,2\}$.

(α) Υπολογίστε το ίχνος της φ_n.

(β) Δείξτε ότι η φ_n είναι αντιστρέψιμη για κάθε θετικό ακέραιο n.

Πρόβλημα 4: Βρείτε όλες τις τριάδες (x, y, z) ακεραίων αριθμών που ικανοποιούν την εξίσωση $y^2z - x^2(x - z) = 0$.

Πρόβλημα 5: Δίνεται φθίνουσα ακολουθία θετικών αριθμών $(x_n)_{n\geq 1}$ τέτοια ώστε $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \infty$. Δείξτε ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n \exp\left(-\frac{x_n}{x_{n+1}}\right) \;=\; \infty.$$

Η διάρκεια της εξέτασης είναι 3 ώρες. **ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!**

Λύσεις

Πρόβλημα 1: (α) Είναι εύκολο να δείξει κανείς ότι η f περιορίζεται σε ομοιομορφισμό από το $(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n})$ στο $(0,1)$. Από το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής προκύπτει ότι η f έχει σταθερό σημείο σε κάθε τέτοιο διάστημα, το οποίο μάλιστα είναι μοναδικό αφού η f είναι φθίνουσα σε κάθε τέτοιο διάστημα, ενώ η ταυτοτική συνάρτηση είναι αύξουσα.

(β) Διαμερίζοντας το $(0,1] = \bigcup_{n=1}^{\infty}(1/(n+1), 1/n]$, μπορούμε να γράψουμε το αριστερό μέλος ως

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \int_{1/(n+1)}^{1/n} g(\frac{1}{x} - n)\, \frac{dx}{1+x} &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 g(y)\, \frac{dy}{(y+n)(y+n+1)} \\
(Fubini) &= \int_0^1 dy\ g(y) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(y+n)(y+n+1)} \\
&= \int_0^1 dy\ g(y) \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{y+n} - \frac{1}{y+n+1}\right] \\
&= \int_{(0,1)} g(y)\, \frac{dy}{1+y}.
\end{aligned}
$$

Πρόβλημα 2: Έχουμε να δείξουμε ότι $(-1)^n p(-1) \geq 0$. Από την υπόθεση του προβλήματος προκύπτει ότι $p(x) = (x+\beta_1)(x+\beta_2)\cdots(x+\beta_{2n})$ για κάποιους θετικούς πραγματικούς αριθμούς $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{2n}$ με $\beta_1\beta_2\cdots\beta_{2n} = 1$ και ότι $p(x) = x^{2n}p(1/x)$. Αν $\beta_i = 1$ για κάποιο δείκτη i, τότε $p(-1) = 0$ και συνεπώς ισχύει το ζητούμενο. Έστω ότι $\beta_i \neq 1$ για κάθε i. Αφού $\beta_1\beta_2\cdots\beta_{2n} = 1$, η ισότητα $p(x) = x^{2n}p(1/x)$ γράφεται

$$\prod_{i=1}^{2n}(x+\beta_i) \;=\; \prod_{i=1}^{2n}(x+\frac{1}{\beta_i}).$$

Συμπεραίνουμε ότι υπάρχουν θετικοί πραγματικοί αριθμοί $b_1, b_2, \ldots, b_n$ διάφοροι του 1, τέτοιοι ώστε

$$p(x) \;=\; \prod_{i=1}^{n}(x+b_i)(x+\frac{1}{b_i}),$$

οπότε

$$(-1)^n p(-1) \;=\; \prod_{i=1}^{n} \frac{(b_i-1)^2}{b_i} > 0.$$

Πρόβλημα 3: Αφού ο συντελεστής του S στο $\varphi_n(S)$ είναι ίσος με $(-1)^{|S|}$, το ίχνος της φ_n είναι ίσο με $\sum_{S\subseteq[n]}(-1)^{|S|} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} = 0$ για κάθε $n \geq 1$. Θεωρούμε τώρα την αντίστροφη λεξικογραφική διάταξη της δοσμένης βάσης του V_n. Για παράδειγμα, για $n = 3$ η διάταξη αυτή είναι η $\varnothing < \{1\} < \{2\} < \{1,2\} < \{3\} < \{1,3\} < \{2,3\} < \{1,2,3\}$ και συμβολίζουμε με A_n τον πίνακα της φ_n ως προς αυτή τη διατεταγμένη βάση. Παρατηρούμε ότι

$$A_n \;=\; \begin{pmatrix} A_{n-1} & A_{n-1} \\ A_{n-1} & -A_{n-1} \end{pmatrix}$$

για $n \geq 1$. Αφαιρώντας την πρώτη στήλη από τη δεύτερη βρίσκουμε ότι

$$\det(A_n) \;=\; (-2)^{2^{n-1}}(\det(A_{n-1}))^2$$

για $n \geq 1$. Με επαγωγή στο n συμπεραίνουμε ότι $\det(A_n) = 2^{2^{n-1}n}$ για $n \geq 2$, όπου $\det(A_0) = 1$ και $\det(A_1) = -2$, και συνεπώς ότι ισχύει το ζητούμενο.

Πρόβλημα 4: Αν $z = 0$, τότε $x = 0$ και το y είναι ελεύθερο να πάρει οποιαδήποτε τιμή στο $\mathbb{Z}$, οπότε προκύπτουν οι λύσεις

$$(x, y, z) \;=\; (0, y, 0), \quad y \in \mathbb{Z}. \tag{1}$$

Για $z \neq 0$ μπορούμε να θέσουμε $u = x/z$ και $v = y/z$, οπότε οι ακέραιες λύσεις (x, y, z) της δοσμένης εξίσωσης αντιστοιχούν στις ρητές λύσεις της $v^2 = u^2(u-1)$.

Θα επικεντρωθούμε στις ρητές λύσεις της $v^2 = u^2(u-1)$. Θεωρούμε την ευθεία $v = \lambda u$ που περνάει από το $(0, 0)$ και από τη ρητή λύση (u, v). Την περίπτωση $u = 0$ θα την εξετάσουμε χωριστά. Με αντικατάσταση υπολογίζουμε ότι

$$\lambda^2 u^2 \;=\; u^2(u-1),$$

η οποία έχει τη λύση $u = 0$ και τη λύση $u = \lambda^2 + 1$. Με αντικατάσταση υπολογίζουμε ότι $v = \lambda(\lambda^2+1)$. Επίσης παρατηρούμε ότι όταν το (u, v) διατρέχει τις ρητές λύσεις της $v^2 = u^2(u-1)$ με $u \neq 0$, το λ διατρέχει τους ρητούς αριθμούς και ότι κάθε ρητός αριθμός λ δίνει μέσω των προηγουμένων εξισώσεων μια ρητή λύση της $v^2 = u^2(u-1)$. Άρα, αν γράψουμε $\lambda = m/n$ με $(m, n) = 1$, έχουμε

$$(u, v) \;=\; \left(\frac{m^2+n^2}{n^2}, \frac{m(m^2+n^2)}{n^3}\right),$$

από όπου προκύπτουν ως λύσεις οι

$$(x, y, z) \;=\; (pn(m^2+n^2), pm(m^2+n^2), pn^3), \quad p, m, n \in \mathbb{Z},\ (m, n) = 1. \tag{2}$$

Επιπλέον, η ευθεία $u = 0$ (η οποία δεν μπορεί να παρασταθεί μέσω εξίσωσης της μορφής $v = \lambda u$) επιβάλει $v = 0$, οπότε έχουμε ως επιπλέον λύσεις τις

$$(x, y, z) = (0, 0, z), \quad z \in \mathbb{Z}. \tag{3}$$

Έτσι, οι λύσεις μας είναι η ένωση των συνόλων που δίνονται από τις εξισώσεις (1), (2), (3).

Πρόβλημα 5: Δείχνουμε πρώτα ότι $e^{-t} \geq e^{-2} - 1 + \frac{1}{t}$ για $t \geq 1$ και συμπεραίνουμε ότι

$$x_n \exp\left(-\frac{x_n}{x_{n+1}}\right) \;\geq\; \frac{x_n}{e^2} - (x_n - x_{n+1})$$

για κάθε $n \geq 1$. Αθροίζοντας για $n \geq 1$ και λαμβάνοντας υπόψην ότι η $\sum_{n=1}^{\infty}(x_n - x_{n+1})$ συγκλίνει προκύπτει το ζητούμενο.