# Διαγωνισμός επιλογής για την Μαθηματική Ολυμπιάδα πρωτοετών και δευτεροετών φοιτητών *SEEMOUS*
# 26 Ιανουαρίου 2013

**1.** (α) Έστω $I_k$, $k = 1, 2, \dots, n$, διαστήματα που περιέχονται στο $(0, 1)$ και ας υποθέσουμε ότι το άθροισμα των μηκών τους είναι 20. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένας αριθμός του $(0, 1)$ που ανήκει σε τουλάχιστον 5 από τα διαστήματα $I_k$.

(β) Θα ονομάζουμε 'ταινία' $S$ κάθε σύνολο σημείων του επιπέδου που περικλείεται αυστηρά ανάμεσα σε δυο παράλληλες ευθείες και ορίζουμε ως πλάτος της, $|S|$, την απόσταση των ευθειών που την ορίζουν. Έστω μια ακολουθία ταινιών $(S_i)_{i=1,2,\dots}$ στο επίπεδο. Αν $\sum_{i=1}^{\infty} |S_i| < \infty$, να αποδείξετε ότι υπάρχουν σημεία του επιπέδου που δεν ανήκουν σε καμία από τις $(S_i)_{i=1,2,\dots}$.

**2.** Δίνεται η ακολουθία $(a_n)_{n=0,1,\dots}$ με

$$a_n = \sum_{k=0}^{6^n} (-1)^k \binom{6^n - k}{k}, \ n = 0, 1, \dots.$$

Να υπολογιστεί (σε όσο το δυνατόν απλούστερη μορφή) το $a_{2013}$.

**3.** Δίνεται αντιστρέψιμος $n \times n$ πίνακας $A$ με τις εξής ιδιότητες:

(α) Κάθε στοιχείο του $A$ ανήκει στο σύνολο $\{-1, 0, 1, i, -i\}$.

(β) Κάθε γραμμή του $A$ περιέχει ακριβώς ένα μη μηδενικό στοιχείο.

Δείξτε ότι υπάρχει φυσικός αριθμός $k$ τέτοιος ώστε $A^* = A^k$.

**4.** Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| \, dx < +\infty.$$

Να υπολογιστεί το

$$\lim_{t \to +\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x + t) - f(x)| \, dx.$$

# Διαγωνισμός επιλογής για την Μαθηματική Ολυμπιάδα πρωτοετών και δευτεροετών φοιτητών *SEEMOUS*
# Αθήνα, 26 Ιανουαρίου 2013
# Θέματα και λύσεις

**1.** (α) Έστω $I_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, διαστήματα που περιέχονται στο $(0, 1)$ και ας υποθέσουμε ότι το άθροισμα των μηκών τους είναι $\sum_{k=1}^{n} |I_k| = 20$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένας αριθμός του $(0, 1)$ που ανήκει σε τουλάχιστον 5 από τα διαστήματα $I_k$.

(β) Θα ονομάζουμε 'ταινία' $S$ κάθε σύνολο σημείων του επιπέδου που περικλείεται αυστηρά ανάμεσα σε δυο παράλληλες ευθείες και ορίζουμε ως πλάτος της, $|S|$, την απόσταση των ευθειών που την ορίζουν. Έστω μια ακολουθία ταινιών $(S_i)_{i=1,2,\ldots}$ στο επίπεδο. Αν $\sum_{i=1}^{\infty} |S_i| < \infty$, να αποδείξετε ότι υπάρχουν σημεία του επιπέδου που δεν ανήκουν σε καμία από τις $(S_i)_{i=1,2,\ldots}$.

**Λύση:** (α) Θέτουμε $f_k(x)$ τη δείκτρια συνάρτηση του διαστήματος $I_k$, για $k = 1, 2, \ldots, n$ που είναι 1 για τα $x \in I_k$ και 0 διαφορετικά. Επίσης ορίζουμε $F(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$, τη συνάρτηση που μετράει σε πόσα από τα $I_k$ ανήκει κάθε $x \in (0, 1)$. Έστω, προς το άτοπο, ότι κάθε αριθμός του $(0, 1)$ ανήκει το πολύ σε 4 από τα διαστήματα $I_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Τότε $F(x) \leq 4$, $x \in (0, 1)$ και έχουμε

$$20 = \sum_{k=1}^{n} |I_k| = \sum_{k=1}^{n} \int_0^1 f_k(x) dx = \int_0^1 F(x) \leq 4,$$

άτοπο. Επομένως, υπάρχει τουλάχιστον ένα $x \in (0, 1)$ που ανήκει σε τουλάχιστον 5 από τα διαστήματα $I_k$.

(β) Ας υποθέσουμε ότι $\sum_{i=1}^{\infty} |S_i| = w$. Θεωρούμε την τομή της ένωσης των ταινιών με έναν κυκλικό δίσκο ακτίνας $R$. Το εμβαδό της τομής κάθε ταινίας $S_i$ με το δίσκο είναι μικρότερο από $2R|S_i|$ και συνεπώς το εμβαδό της τομής του $\cup_{i=1}^{\infty} S_i$ με το δίσκο είναι μικρότερο του $2R \sum_{i=1}^{\infty} |S_i| < 2Rw$. Επιλέγοντας ακτίνα $R > 2w/\pi$, έχουμε ότι το εμβαδό του δίσκου είναι $\pi R^2 > 2Rw$ και άρα μεγαλύτερο του εμβαδού της τομής του $\cup_{i=1}^{\infty} S_i$ με το δίσκο. Επομένως υπάρχουν σημεία του δίσκου που δεν ανήκουν σε καμία από τις $(S_i)_{i=1,2,\ldots}$.

**2.** Δίνεται η ακολουθία $(a_n)_{n=0,1,\ldots}$ με

$$a_n = \sum_{k=0}^{6^n} (-1)^k \binom{6^n - k}{k}, \; n = 0, 1, \ldots.$$

Να υπολογιστεί (σε όσο το δυνατόν απλούστερη μορφή) το $a_{2013}$.

**Λύση:** Το άθροισμα $\sum_{k=0}^{6^n} (-1)^k \binom{6^n-k}{k}$ εξαρτάται από το $n$ μέσω του $m = 6^n$. Θα υπολογίσουμε το γενικότερο άθροισμα

$$b_m = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m - k}{k}, \; m = 0, 1, 2, \ldots.$$

Θεωρούμε τη γεννήτρια της ακολουθίας $B(t) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m t^m$. Έχουμε:

$$\begin{aligned}
B(t) &= \sum_{m=0}^{\infty} b_m t^m = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{m}(-1)^k \binom{m-k}{k} t^m \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \sum_{m=k}^{\infty} \binom{m-k}{k} t^m = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \sum_{r=0}^{\infty} \binom{r}{k} t^{r+k} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}(-t)^k \sum_{r=0}^{\infty} \binom{r}{k} t^r = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-t)^k}{k!} \sum_{r=0}^{\infty} r(r-1)\cdots(r-k+1)t^r.
\end{aligned}$$

Όμως, παραγωγίζοντας $k$ φορές τη σειρά $\sum_{r=0}^{\infty} t^r = (1-t)^{-1}$, έχουμε

$$\sum_{r=0}^{\infty} r(r-1)\cdots(r-k+1)t^{r-k} = k!(1-t)^{-(k+1)}.$$

Επομένως, τελικά έχουμε

$$\begin{aligned}
B(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-t^2)^k}{(1-t)^{k+1}} = \frac{1}{1-t}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{-t^2}{1-t}\right)^k = \frac{1}{1-t}\cdot\frac{1}{1+\frac{t^2}{1-t}} \\
&= \frac{1}{1-t+t^2} = \frac{1+t}{1+t^3} = \frac{1}{1+t^3} + t\frac{1}{1+t^3} \\
&= \sum_{h=0}^{\infty}(-1)^h t^{3h} + \sum_{h=0}^{\infty}(-1)^h t^{3h+1}.
\end{aligned}$$

Συνεπώς $b_m = (-1)^h$, όταν $m = 3h$ ή $m = 3h+1$, ενώ $b_m = 0$, όταν $m = 3h+2$, $h = 0, 1, 2, \ldots$.
Άρα $a_{2013} = b_{6^{2013}} = 1$.

**3.** Δίνεται αντιστρέψιμος $n \times n$ πίνακας $A$ με τις εξής ιδιότητες:
(α) Κάθε στοιχείο του $A$ ανήκει στο σύνολο $\{-1, 0, 1, i, -i\}$.
(β) Κάθε γραμμή του $A$ περιέχει ακριβώς ένα μη μηδενικό στοιχείο.
Δείξτε ότι υπάρχει φυσικός αριθμός $k$ τέτοιος ώστε $A^* = A^k$.

**Λύση:** Έστω $G$ το σύνολο όλων των αντιστρέψιμων $n \times n$ πινάκων με τις ιδιότητες (α) και (β). Παρατηρούμε ότι το σύνολο $G$ είναι κλειστό ως προς τον πολλαπλασιασμό και πεπερασμένο. Πραγματικά βλέπουμε εύκολα ότι $X, Y \in G$ συνεπάγεται $XY \in G$. Επίσης, ένας πίνακας του $G$ φτιάχνεται σε 2 στάδια. Επιλέγουμε τις θέσεις των γραμμών που έχουν το μη-μηδενικό στοιχείο με $n!$ τρόπους και κατόπιν επιλέγουμε ποιό στοιχείο θα μπει σε κάθε θέση από τα $-1, 1, i, -i$ με $4^n$ τρόπους. Συνεπώς το $G$ έχει ακριβώς $n!4^n$ στοιχεία. Αφού $A \in G$, από τα (α) και (β) προκύπτει ότι υπάρχουν φυσικοί αριθμοί $s < t$ με $A^s = A^t$. Επομένως για $m = t - s$ ισχύει $A^m = I_n$. Από την άλλη μεριά οι γραμμές του $A$ είναι προφανώς ορθογώνιες ανά δύο (ο $A$ είναι ορθομοναδιαίος) οπότε $A^*A = I_n$. Επομένως $A^* = A^{-1} = A^{m-1}$.

**4.** Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx < +\infty.$$

Να υπολογιστεί το

$$\lim_{t\to+\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x+t) - f(x)|\, dx.$$

**Λύση:** Προφανώς ισχύει

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x+t) - f(x)|\, dx \leq 2 \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx$$

για κάθε $t$. Από την άλλη πλευρά,

$$\begin{aligned}
2\int_{-\infty}^{\infty} |f(x+t) - f(x)|\, dx &\geq \int_{-\infty}^{\infty} \big(|f(x+t)| + |f(x)| - 2\min\{|f(x+t)|, |f(x)|\}\, dx \\
&= 2\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx - 2\int_{-\infty}^{\infty} \min\{|f(x+t)|, |f(x)|\}\, dx \\
&\geq 2\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx - 2\int_{-\infty}^{-t/2} |f(x)|\, dx - 2\int_{-t/2}^{\infty} |f(x+t)|\, dx \\
&= 2\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx - 2\int_{-\infty}^{-t/2} |f(x)|\, dx - 2\int_{t/2}^{\infty} |f(x)|\, dx,
\end{aligned}$$

το οποίο συγκλίνει στο $2\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx$ καθώς το $t \to +\infty$, διότι

$$\lim_{t\to+\infty} \int_{-\infty}^{-t/2} |f(x)|\, dx = \lim_{t\to+\infty} \int_{t/2}^{\infty} |f(x)|\, dx = 0.$$