Διαγωνισμός επιλογής της ΕΜΕ για τη Μαθηματική Ολυμπιάδα *SEEMOUS* πρωτοετών και δευτεροετών φοιτητών – 29 Ιανουαρίου 2011

1. Δίνονται οι $n \times n$ πίνακες A, B που ικανοποιούν $AB + A + B = 0$. Να εκφραστεί το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A συναρτήσει του χαρακτηριστικού πολυωνύμου του B και της τιμής $\det(I + A)$.

2. Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, 2 φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση τέτοια ώστε

$$f(0) = f(1) = 0, f'(0) > 0,$$

η οποία επιπρόσθετα ικανοποιεί τη συνθήκη

$$(*) \quad \left(2\frac{f(x)}{x} - f'(x)\right)\left(2\frac{f(y)}{y} - f'(y)\right) > \left(\frac{f(x)}{x} + \frac{f(y)}{y} - f'(y)\right)^2, \quad \forall\ 0 < y < x < 1.$$

(α) Αποδείξτε ότι

$$f''(x) \leq 0, \quad \forall\ 0 < x < 1,$$

και μάλιστα δεν υπάρχει διάστημα $(\alpha, \beta) \subseteq [0,1]$ ώστε $f''(x) = 0, \quad \forall\ \alpha < x < \beta$.
(β) Βρείτε γνήσια κοίλη συνάρτηση f, που να μην ικανοποιεί την συνθήκη $(*)$.

3. Έστω

$$\mathcal{A} = \{u \in C[0,1], \quad u(0) = 1,\ u(1) = 0\},$$

που είναι τμηματικά C^1 και θεωρούμε το πρόβλημα

$$\kappa_\alpha = \inf\{\int_0^1 x^\alpha (u'(x))^2 dx, \quad u \in \mathcal{A}\}.$$

(α) Εάν $0 < \alpha < 1$, αποδείξτε ότι $\kappa_\alpha = 1 - \alpha$ και υπάρχει συνάρτηση $u \in \mathcal{A}$ τέτοια ώστε

$$1 - \alpha = \int_0^1 x^\alpha (u'(x))^2 dx.$$

(β) Εάν $\alpha > 1$ αποδείξτε ότι $\kappa_\alpha = 0$, και δεν υπάρχει συνάρτηση $u \in \mathcal{A}$ τέτοια ώστε

$$0 = \int_0^1 x^\alpha (u'(x))^2 dx.$$

Υπόδειξη Για $u, v \in \mathcal{A}$ ισχύει

$$(u'(x))^2 \geq (v'(x))^2 + 2v'(x)(u'(x) - v'(x)).$$

4. Έστω το σύνολο $X = \{1, 2, \ldots, n\}$. Μια οικογένεια υποσυνόλων $\{X_1, X_2, \ldots, X_r\}$ του X θα λέγεται συνεκτική οικογένεια του X, αν

- τα σύνολα $X_1, X_2, \ldots, X_r$ είναι διακεκριμένα
- τα σύνολα $X_1, X_2, \ldots, X_r$ έχουν ανά δύο μή κενή τομή.

Να βρείτε το μέγιστο αριθμό υποσυνόλων $r_{\max}$ που μπορεί να έχει μια συνεκτική οικογένεια του X.

5. Έστω ένας p πρώτος αριθμός και a, b φυσικοί με $a > b$. Τους a, b τους γράφουμε στην μορφή $a = a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + a_3 p^3 + \cdots + a_r p^r$, και $b = b_0 + b_1 p + b_2 p^2 + b_3 p^3 + \cdots + b_s p^s$ όπου τα $0 \leq a_i, b_i < p$. Δείξτε ότι

$$\binom{a}{b} \equiv \prod_{i=0}^{r} \binom{a_i}{b_i} \mod p.$$

Δείξτε ότι $\binom{a}{b} \not\equiv 0 \mod p$ αν και μόνο αν $a_i \geq b_i$ για κάθε i.

Λύσεις:

1. Παρατηρούμε ότι η συνθήκη $A+B+AB=0$ επιβάλει $(I+A)(I+B)=I$. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A είναι
$$\phi_A(x)=\det(xI-A)$$
και το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του $I+A$ είναι
$$\phi_{A+I}(x)=\det(xI-(I+A))=\det((x-1)I-A)=\phi_A(x-1).$$
Τα χαρακτηριστικά πολυώνυμα των πινάκων C, C^{-1} συνδέονται με τις σχέσεις:
$$\phi_C(x)=\det(xI-C)=\det(xCC^{-1}-C)=\det(-C)\det(-xC^{-1}+I)=$$
$$(-x)^n\det(C)\det(\frac{1}{x}I-C^{-1})=(-x)^n\det(C)\phi_{C^{-1}}(x^{-1}).$$
Συνδυάζοντας τα παραπάνω έχουμε ότι
$$\phi_{I+A}(x)=(-x)^n\det(I+A)\phi_{I+B}(x^{-1}).$$
Όμως
$$\phi_A(x)=\phi_{I+A}(x+1)=(1+x)^n(-1)^n\det(I+A)\phi_{I+B}((1+x)^{-1})=$$
$$=(1+x)^n(-1)^n\det(I+A)\phi_B((1+x)^{-1}-1).$$

2. (α) Επειδή $\lim_{x\to 0^+}\left(2\frac{f(x)}{x}-f'(x)\right)=f'(0)>0$, προκύπτει εύκολα από την $(*)$ ότι $2\frac{f(y)}{y}-f'(y)>0$ για κάθε $y\in(0,1)$. Δημιουργούμε την διαφορά
$$\frac{\left(2\frac{f(x)}{x}-f'(x)\right)\left(2\frac{f(y)}{y}-f'(y)\right)-\left(\frac{f(x)}{x}+\frac{f(y)}{y}-f'(y)\right)^2}{x-y}>0$$
και παίρνουμε το όριο καθώς $y\to x^-$, οπότε προκύπτει (μπορεί να γίνει με κανόνα Hospital)
$$-\left(2\frac{f(x)}{x}-f'(x)\right)f^{''}(x)\geq 0 \text{ για } x\in(0,1).$$
Επομένως, $f^{''}(x)\leq 0$ για $x\in(0,1)$. Έαν $f^{''}=0$ σε κάποιο διάστημα (a,b) τότε
$$f(x)=kx+\ell,\ \text{ για } x\in(a,b)$$
και η διαφορά
$$\left(2\frac{f(x)}{x}-f'(x)\right)\left(2\frac{f(y)}{y}-f'(y)\right)-\left(\frac{f(x)}{x}+\frac{f(y)}{y}-f'(y)\right)^2=-\ell^2\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{x}\right)^2\leq 0 \text{ για } a<y<x<b.$$
Εναλλακτικά η $(*)$ γράφεται ισοδύναμα
$$(f'(y)-f'(x))\left(2\frac{f(y)}{y}-f'(y)\right)>\left(\frac{f(x)}{x}-\frac{f(y)}{y}\right)^2,\ \ \forall\ 0<y<x<1.$$

(β) Αν η ϕ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη κοίλη συνάρτηση με $\phi(0)=\phi(1)=0$, $\phi'(0)>0$ και $\phi^{''}(x)=0$, για $x\in(a,b)\subset[0,1]$, οπότε $\phi(x)=kx+\ell$ για $x\in(a,b)$ τότε η $f_\epsilon(x)=\epsilon x(1-x)+(1-\epsilon)\phi(x)$ για $0<\epsilon<1$ είναι γνήσια κοίλη και για $0<\epsilon$ μικρό ικανοποιεί τις απαιτήσεις του προβλήματος. Ειδικότερα η επιλογή $\ell\neq 0$ δίνει για $a<y<x<b$,
$$\left(2\frac{f_\epsilon(x)}{x}-f'_\epsilon(x)\right)\left(2\frac{f_\epsilon(y)}{y}-f'_\epsilon(y)\right)-\left(\frac{f_\epsilon(x)}{x}+\frac{f_\epsilon(y)}{y}-f'_\epsilon(y)\right)^2=$$
$$\epsilon^2(x-y)(2-x+y)+2\epsilon(1-\epsilon)(x-y)(k+\frac{\ell}{x}+\frac{\ell}{y})-(1-\epsilon)^2\ell^2\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{x}\right)^2.$$

3. Επειδή για $u, v \in \mathcal{A}$ έχουμε

$$\int_0^1 x^a (u'(x))^2 dx \geq \int_0^1 x^a (v'(x))^2 dx + 2\int_0^1 x^a v'(x)\left(u'(x) - v'(x)\right) dx,$$

και επειδή

$$\int_0^1 (u'(x) - v'(x)) dx = 0,$$

επιλέγουμε $v \in \mathcal{A}$ ώστε $x^a v'(x) = c$, για $x \in (b, 1)$, $(b, 1) \subset [0, 1]$.

Αν $0 < a < 1$, $v'(x) = \frac{c}{x^a}$ και επομένως

$$v(x) = kx^{1-a} + \ell, \quad x \in (0, 1).$$

Απαιτούμε $v \in \mathcal{A}$ δηλαδή $v(1) = 0 \Leftrightarrow k + \ell = 0$ και $v(0) = 1 \Leftrightarrow \ell = 1$ οπότε και $k = -1$. Επομένως, η επιλογή $v(x) = 1 - x^{1-a}$ $x \in [0, 1]$ δίνει ότι για την τυχαία $u \in \mathcal{A}$

$$\int_0^1 x^a (u'(x))^2 dx \geq \int_0^1 x^a ((1-a)x^{-a})^2 dx = 1 - a.$$

Αν $a > 1$ η $v(x) = kx^{1-a} + \ell$ απειρίζεται όταν $x \to 0^+$, οπότε κατασκευάζουμε την

$$v_\theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{αν } 0 \leq x \leq \theta \\ \frac{1}{1-\theta^{1-a}}(1 - x^{1-a}) & \text{αν } \theta < x \leq 1 \end{cases}$$

Τότε

$$\int_0^1 x^a (v_\theta'(x))^2 dx = \int_\theta^1 x^a (v_\theta'(x))^2 dx = \frac{a-1}{\theta^{1-a} - 1} \to 0, \theta \to 0^+.$$

4. Αν μια συνεκτική οικογένεια $\{X_1, X_2, \ldots, X_r\}$ περιέχει κάποιο υποσύνολο του X τότε δεν μπορεί να περιέχει το συμπληρωματικό του. Συνεπώς μια συνεκτική οικογένεια μπορεί να περιέχει το πολύ τα μισά υποσύνολα του δυναμοσυνόλου του X, άρα $r_{\max} \leq 2^{n-1}$.

Αυτό το άνω φράγμα πιάνεται. Π.χ. θεωρήστε την οικογένεια των υποσυνόλων που φτιάχνεται επισυνάπτωντας σε κάθε υποσύνολο του $\{1, 2, \ldots, n-1\}$ το στοιχείο n. Η οικογένεια είναι συνεκτική αφού τα συνολά της είναι διακεκριμένα και έχουν ανά δύο τουλάχιστον το στοιχείο n κοινό. Επιπλέον έχει 2^{n-1} στοιχεία. Άρα τελικά $r_{\max} = 2^{n-1}$.

5. Παρατηρούμε ότι για $0 < i < p$ έχουμε $\binom{p}{i} \equiv 0 \mod p$. Πράγματι

$$\binom{p}{i} = \frac{p!}{i!(p-i)!},$$

ο αριθμητής διαιρείται με p ενώ οι παράγοντες στον παρονομαστή είναι όλοι μικρότεροι από p. Συνεπώς

$$(1+x)^p \equiv 1 + x^p \mod p.$$

Επιπλέον η παραπάνω ιδιότητα εφαρμοσμένη διαδοχικά k φορές οδηγεί στην

$$(1+x)^{p^k} \equiv 1 + x^{p^k} \mod p.$$

Υπολογίζουμε ότι

$$(1+x)^{a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \cdots + a_r p^r} = \prod_{i=0}^{r} (1 + x^{p^i})^{a_i}.$$

Συγκρίνοντας τους συντελεστές του πολυωνύμου με τους συντελεστές του διωνυμικού αναπτύγματος

$$(1+x)^a = \sum_{\nu=0}^{a} \binom{a}{\nu} x^\nu$$

οδηγούμαστε στο ότι

$$\binom{a}{b} \equiv \prod_{i=0}^{r} \binom{a_i}{b_i} \mod p.$$

Το τελικό συμπέρασμα προκύπτει από το ότι $\binom{a_i}{b_i} = 0$ αν και μόνο αν $a_i < b_i$.