Προβλήματα για το διαγωνισμό επιλογής της ΕΜΕ για τη Μαθηματική Ολυμπιάδα πρωτοετών και δευτεροετών φοιτητών

4 Φεβρουαρίου 2012

Πρόβλημα 1:

(α) Υπολογίστε το όριο

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^4}\left(\prod_{k=1}^{2n}(n^2+k^2)\right)^{1/n}.$$

(β) Να αποφανθείτε αν είναι αληθής ή ψευδής η παρακάτω πρόταση: Αν (a_n) και (b_n) είναι ακολουθίες θετικών πραγματικών αριθμών ($n = 1, 2, \ldots$) και

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{b_n} = \infty,$$

τότε

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n+b_n} = \infty.$$

Πρόβλημα 2: Να δείξετε ότι δοθέντων πέντε σημείων στο επίπεδο, τα οποία ανά τρία είναι μη συνευθειακά, μπορούμε πάντοτε να επιλέξουμε μία τριάδα A, B, C από αυτά, έτσι ώστε η γωνία $A\hat{B}C$ να είναι αμβλεία.

Πρόβλημα 3: Συμβολίζουμε με $\mathbb{R}^{n\times n}$ το σύνολο των $n\times n$ πινάκων με στοιχεία πραγματικούς αριθμούς.

(α) Αν $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, δείξτε ότι υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n+1}$, όχι όλοι μηδέν, τέτοιοι ώστε $\det(\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \cdots + \lambda_{n+1}A_{n+1}) = 0$.

(β) Δείξτε ότι υπάρχουν πίνακες $A_1, A_2 \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ με την εξής ιδιότητα: αν λ_1, λ_2 είναι τυχαίοι πραγματικοί αριθμοί, όχι και οι δύο μηδέν, τότε $\det(\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2) \neq 0$.

(γ) Δείξτε ότι υπάρχουν πίνακες $A_1, A_2, A_3, A_4 \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ με την εξής ιδιότητα: αν $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ είναι τυχαίοι πραγματικοί αριθμοί, όχι όλοι μηδέν, τότε $\det(\lambda_1A_1+\lambda_2A_2+\lambda_3A_3+\lambda_4A_4) \neq 0$.

Πρόβλημα 4: Θέτουμε $X_n = \{1, -1, 2, -2, \ldots, n, -n\}$ και θεωρούμε το σύνολο Ω_n των αμφιμονοσήμαντων απεικονίσεων $\sigma : X_n \to X_n$ που έχουν την ιδιότητα $\sigma(-i) = -\sigma(i)$ για $1 \leq i \leq n$. Επιλέγουμε τυχαία και ομοιόμορφα ένα στοιχείο σ του Ω_n. Υπολογίστε το όριο $\lim_{n\to\infty} p(n)$, όπου $p(n)$ είναι η πιθανότητα να ισχύει $\sigma(i) \neq i$ για $1 \leq i \leq n$.

Πρόβλημα 5: Να εξετάσετε αν υπάρχει παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$, τέτοια ώστε να ισχύει $f'(x) \geq f(x + f(x))$ για κάθε $x > 0$.

Η διάρκεια της εξέτασης είναι 3 ώρες. **ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!**

Λύσεις

Πρόβλημα 1: (α) Γράφοντας

$$a_n \;=\; \frac{1}{n^4}\left(\prod_{k=1}^{2n}(n^2+k^2)\right)^{1/n}$$

υπολογίζουμε ότι

$$\begin{aligned}\log a_n \;&=\; -4\log n \;+\; \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n}\log(n^2+k^2) \;=\; -4\log n \;+\; \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n}\left(2\log n+\log\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)\right)\\ &=\; \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n}\log\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right) \;=\; \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n} f(\frac{k}{2n}),\end{aligned}$$

όπου $f(x)=1+4x^2$. Από την τελευταία έκφραση για το $\log a_n$ έπεται ότι

$$\lim_{n\to\infty}\log a_n \;=\; 2\int_0^1 \log(1+4x^2)dx.$$

Ολοκληρώνοντας κατά παράγοντες και συνεχίζοντας κατά τα γνωστά, βρίσκουμε ότι το παραπάνω ολοκλήρωμα είναι ίσο με $\log 5-2+\arctan(2)$ και συμπεραίνουμε ότι $\lim_{n\to\infty}\log a_n = 25\,\exp\{2\arctan(2)-4\}\approx 4.195355357$.

(β) Θέτοντας $a_n=n$, $b_n=n^2$ για άρτιο n και $a_n=n^2$, $b_n=n$ για περιττό n, έχουμε ότι οι σειρές $\sum_{n\ge1}\frac{1}{a_n}$ και $\sum_{n\ge1}\frac{1}{b_n}$ αποκλίνουν και ότι η σειρά

$$\sum_{n\ge1}\frac{1}{a_n+b_n} \;=\; \sum_{n\ge1}\frac{1}{n^2+n}$$

συγκλίνει. Συνεπώς, η πρόταση είναι ψευδής.

Πρόβλημα 2: *Πρώτη Λύση.* Συμβολίζουμε με Π την κυρτή θήκη των πέντε δοσμένων σημείων και παρατηρούμε ότι το Π είναι κυρτό πολύγωνο με τρεις, τέσσερις ή πέντε κορυφές. Στην τρίτη περίπτωση, το άθροισμα των εσωτερικών γωνιών του Π είναι ίσο με 3π. Άρα, μία τουλάχιστον από αυτές είναι μεγαλύτερη ή ίση από $3\pi/5$ και συνεπώς ισχύει το ζητούμενο. Στη δεύτερη περίπτωση, ένα από τα δοσμένα σημεία, έστω το X, βρίσκεται στο εσωτερικό του Π. Τότε, το άθροισμα των τεσσάρων γωνιών της μορφής $A\hat{X}B$, όπου το AB διατρέχει τις ακμές του Π, είναι ίσο με 2π. Αφού τα δοσμένα σημεία είναι ανά τρία μη συνευθειακά, συμπεραίνουμε ότι μία τουλάχιστον από τις τέσσερις αυτές γωνίες είναι μεγαλύτερη από $\pi/2$. Με τον ίδιο τρόπο, στην πρώτη περίπτωση βρίσκουμε γωνία οριζόμενη από τα δοσμένα σημεία μεγαλύτερη ή ίση από $2\pi/3$.

Δεύτερη Λύση. Επιλέγουμε άξονες ορθοκανονικού συστήματος συντεταγμένων έτσι ώστε καμία από τις δέκα ευθείες που ορίζονται από τα πέντε δοσμένα σημεία να μην είναι παράλληλη σε κάποιον από αυτούς. Διατάσσοντας τα σημεία ως προς την τετμημένη τους, μπορούμε να υποθέσουμε ότι αυτά είναι τα $P_1(x_1,y_1),P_2(x_2,y_2),\ldots,P_5(x_5,y_5)$, με $x_1<x_2<\cdots<x_5$. Για δείκτες $1\le i<j<k\le 5$ έχουμε

$$\overline{P_jP_k}\cdot\overline{P_jP_i} \;=\; (x_k-x_j)(x_j-x_i) \;+\; (y_k-y_j)(y_j-y_i) < (y_k-y_j)(y_j-y_i).$$

Άρα, αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχουν δείκτες $1 \le i < j < k \le 5$ τέτοιοι ώστε $(y_k - y_j)(y_j - y_i) < 0$, δηλαδή ώστε το y_j να βρίσκεται μεταξύ των y_i και y_k, αφού τότε $\overline{P_jP_k} \cdot \overline{P_jP_i} < 0$ και συνεπώς η γωνία $P_i\hat{P}_jP_k$ είναι αμβλεία.

Υποθέτουμε ότι $y_1 < y_5$ (η απόδειξη είναι ανάλογη αν $y_1 > y_5$). Αν κάποιο από τα y_2, y_3, y_4 βρίσκεται ανάμεσα στα y_1, y_5, τότε επιλέγουμε την αντίστοιχη τριάδα y_1, y_j, y_5. Διαφορετικά, δύο τουλάχιστον από τα y_2, y_3, y_4 είτε είναι μικρότερα του y_1, είτε μεγαλύτερα του y_5. Έστω, για παράδειγμα, ότι $y_2, y_3 < y_1$. Τότε, είτε $y_3 < y_2$, οπότε επιλέγουμε την τριάδα $y_3 < y_2 < y_1$, είτε $y_2 < y_3$, οπότε επιλέγουμε την τριάδα $y_2 < y_3 < y_5$. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη.

Πρόβλημα 3: Έστω $A = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \cdots + \lambda_{n+1} A_{n+1}$. Θέτοντας καθένα από τα στοιχεία της πρώτης γραμμής του πίνακα A ίσα με μηδέν προκύπτει ένα ομογενές σύστημα n γραμμικών εξισώσεων στους $n+1$ αγνώστους $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n+1}$. Ως γνωστόν, ένα τέτοιο σύστημα έχει μη μηδενική λύση. Επομένως, υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n+1}$, όχι όλοι μηδέν, τέτοιοι ώστε ο A να έχει μια μηδενική γραμμή και συνεπώς ορίζουσα μηδέν. Δείξαμε λοιπόν ότι ισχύει το (α). Για το (β) θέτουμε

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

και παρατηρούμε ότι

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} \lambda_1 & -\lambda_2 \\ \lambda_2 & \lambda_1 \end{pmatrix} = \lambda_1^2 + \lambda_2^2,$$

οπότε $\det(A) = 0$ μόνο αν $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Για το (γ) θέτουμε

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

και

$$A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

και υπολογίζουμε ότι

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 \\ \lambda_2 & -\lambda_1 & \lambda_4 & -\lambda_3 \\ \lambda_3 & -\lambda_4 & -\lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_4 & \lambda_3 & -\lambda_2 & -\lambda_1 \end{pmatrix} = -(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 + \lambda_4^2)^2.$$

Από την τελευταία ισότητα προκύπτει ότι $\det(A) = 0$ μόνο αν $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$.

Πρόβλημα 4: Παρατηρούμε ότι για κάθε $\sigma \in \Omega_n$ υπάρχει μοναδική μετάθεση $\tau : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ και επιλογή προσήμων $\varepsilon_i \in \{-1, 1\}$ για $1 \le i \le n$ ώστε να ισχύει $\sigma(i) = \varepsilon_i \tau(i)$ (οπότε και $\sigma(-i) = -\varepsilon_i \tau(i)$) για $1 \le i \le n$. Αφού υπάρχουν $n!$ επιλογές για τη μετάθεση τ και 2^n επιλογές για τα πρόσημα, συμπεραίνουμε ότι $|\Omega_n| = 2^n n!$. Επιπλέον, για τυχαίους δείκτες $1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n$, το πλήθος των $\sigma \in \Omega_n$ με $\sigma(i_j) = i_j$ για $1 \le j \le k$ είναι ίσο με $2^{n-k}(n-k)!$. Επομένως, σύμφωνα με την αρχή εγκλεισμού - αποκλεισμού, το πλήθος των $\sigma \in \Omega_n$ με $\sigma(i) \ne i$ για κάθε δείκτη i είναι ίσο με

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} 2^{n-k} (n-k)!.$$

Από τα προηγούμενα προκύπτει ότι

$$p(n) \ = \ \frac{1}{2^n n!} \ \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} 2^{n-k}(n-k)! \ = \ \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1/2)^k}{k!}$$

και συνεπώς ότι $\lim_{n\to\infty} p(n) = e^{-1/2}$.

Πρόβλημα 5: Υποθέτουμε ότι υπάρχει τέτοια συνάρτηση. Τότε, έχουμε $f'(x) \geq f(x+f(x)) > 0$ για κάθε $x > 0$ και συνεπώς η f είναι γνησίως αύξουσα. Επομένως, έχουμε $f'(x) \geq f(x+f(x)) > f(x) \geq f(1) := a > 0$ για $x \geq 1$ και συνεπώς $\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$. Ειδικότερα, για αρκετά μεγάλο $b > 0$ έχουμε $f(x) \geq 1$ για κάθε $x \geq b$. Αφού η f είναι γνησίως αύξουσα, συμπεραίνουμε ότι $f'(x) \geq f(x+f(x)) > f(x+1) \geq f(b+1)$ για κάθε $x \geq b$. Εφαρμόζοντας τώρα το θεώρημα της μέσης τιμής στι διάστημα $[b, b+1]$ προκύπτει ότι υπάρχει $\xi \in (b, b+1)$ με $f(b+1) - f(b) = f'(\xi)$ και συνεπώς ότι ισχύει $f(b+1) - f(b) > f(b+1)$, δηλαδή ότι $f(b) < 0$. Από την αντίφαση αυτή έπεται ότι δεν υπάρχει συνάρτηση f με τις επιθυμητές ιδιότητες.