# Διαγωνισμός επιλογής για την Μαθηματική Ολυμπιάδα πρωτοετών και δευτεροετών φοιτητών *SEEMOUS*
# 26 Ιανουαρίου 2013

**1.** (α) Έστω $I_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, διαστήματα που περιέχονται στο $(0, 1)$ και ας υποθέσουμε ότι το άθροισμα των μηκών τους είναι 20. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένας αριθμός του $(0, 1)$ που ανήκει σε τουλάχιστον 5 από τα διαστήματα $I_k$.

(β) Θα ονομάζουμε 'ταινία' $S$ κάθε σύνολο σημείων του επιπέδου που περικλείεται αυστηρά ανάμεσα σε δυο παράλληλες ευθείες και ορίζουμε ως πλάτος της, $|S|$, την απόσταση των ευθειών που την ορίζουν. Έστω μια ακολουθία ταινιών $(S_i)_{i=1,2,\ldots}$ στο επίπεδο. Αν $\sum_{i=1}^{\infty} |S_i| < \infty$, να αποδείξετε ότι υπάρχουν σημεία του επιπέδου που δεν ανήκουν σε καμία από τις $(S_i)_{i=1,2,\ldots}$.

**2.** Δίνεται η ακολουθία $(a_n)_{n=0,1,\ldots}$ με

$$a_n = \sum_{k=0}^{6^n} (-1)^k \binom{6^n - k}{k}, \ n = 0, 1, \ldots.$$

Να υπολογιστεί (σε όσο το δυνατόν απλούστερη μορφή) το $a_{2013}$.

**3.** Δίνεται αντιστρέψιμος $n \times n$ πίνακας $A$ με τις εξής ιδιότητες:

(α) Κάθε στοιχείο του $A$ ανήκει στο σύνολο $\{-1, 0, 1, i, -i\}$.

(β) Κάθε γραμμή του $A$ περιέχει ακριβώς ένα μη μηδενικό στοιχείο.

Δείξτε ότι υπάρχει φυσικός αριθμός $k$ τέτοιος ώστε $A^* = A^k$.

**4.** Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| \, dx < +\infty.$$

Να υπολογιστεί το

$$\lim_{t \to +\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x + t) - f(x)| \, dx.$$