Διαγωνισμός επιλογής για τον IMC 2024

29 Ιουνίου 2024

Πρόβλημα 1. Έστω $(a_n)_{n\geq 0}$ ακολουθία πραγματικών αριθμών που ικανοποιεί την

$$a_{n+1} = a_n + \frac{2a_{n-1}}{n+1}$$

για κάθε n θετικό ακέραιο. Να δειχθεί ότι το $\lim_{n\to\infty} a_n/n^2$ υπάρχει στο $\mathbb{R}$.

Πρόβλημα 2. Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση με $\int_0^1 f(t)\,dt = 0$. Να δειχθεί ότι

$$\int_0^1 f^2(t)\,dt \leq \frac{1}{2}\int_0^1 |f'(t)|\,dt \int_0^1 |f(t)|\,dt.$$

Πρόβλημα 3. Δίνεται ότι το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}[x]$ έχει τρεις διακεκριμένες πραγματικές ρίζες. Δείξτε ότι το

$$Q(x) = x^3 + ax^2 + \frac{1}{4}(a^2 + b)x + \frac{1}{8}(ab - c)$$

έχει την ίδια ιδότητα.

Πρόβλημα 4. Δείξτε την ταυτότητα

$$\sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i}\binom{n}{i} a^{m-i} b^i = \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i}\binom{n+i}{i} (a-b)^{m-i} b^i$$

για $m, n \in \mathbb{N}$ και $a, b \in \mathbb{C}$.

Πρόβλημα 5. Δίνεται δένδρο T με n κορυφές $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Αν D είναι ο $n \times n$ πίνακας το (i,j)-στοιχείο του οποίου ισούται με την απόσταση των κορυφών v_i και v_j στο T, δείξτε ότι $\det(D) = (-1)^{n-1}(n-1)2^{n-2}$.

Η διάρκεια της εξέτασης είναι 3 ώρες. **ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!**

Λύσεις

Πρόβλημα 1: Πρώτη περίπτωση: Αν $a_0, a_1 \geq 0$, τότε προφανώς η $(a_n)_{n\geq 0}$ είναι αύξουσα. Επιπλέον, η $(a_n/n^2)_{n\geq 1}$ είναι φθίνουσα διότι, από την αναδρομική σχέση και το ότι $a_{n-1} \leq a_n$, έχουμε

$$\frac{a_{n+1}}{(n+1)^2} \leq \frac{a_n}{(n+1)^2}\left(1 + \frac{2}{n+1}\right) = \frac{a_n}{n^2}\frac{n^2(n+3)}{(n+1)^3} \leq \frac{a_n}{n^2}.$$

για κάθε θετικό ακέραιο n.

Δεύτερη περίπτωση: Οποιαδήποτε $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$. Έστω $(A_n)_{n\geq 0}$ η ακολουθία που ορίζεται από την αναδρομή με $(A_0, A_1) = (1, 0)$ και $(B_n)_{n\geq 0}$ η ακολουθία που ορίζεται από την αναδρομή με $(B_0, B_1) = (0, 1)$. Τότε, $a_n = a_0 A_n + a_1 B_n$ και το συμπέρασμα έπεται από την πρώτη περίπτωση.

Πρόβλημα 2: Έστω I το ολοκλήρωμα στο αριστερό μέλος. Τότε, επειδή $\int_0^1 f(t)\,dt = 0$, έχουμε

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 f(x)\int_0^x f'(t)\,dtdx = \int_0^1\int_0^x f(x)f'(t)\,dtdx, \\ -I &= \int_0^1 f(x)\int_x^1 f'(t)\,dtdx = \int_0^1\int_x^1 f(x)f'(t)\,dtdx. \end{aligned}$$

Άρα

$$2I \leq \int_0^1\int_0^1 |f(x)f'(t)|\,dtdx = \int_0^1 |f'(t)|\,dt\int_0^1 |f(x)|dx.$$

Πρόβλημα 3: Έστω ότι $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in \mathbb{R}$ είναι οι διακεκριμένες ρίζες του $P(x)$. Τότε,

$$\begin{aligned} \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 &= -a, \\ \xi_1\xi_2 + \xi_1\xi_3 + \xi_2\xi_3 &= b, \\ \xi_1\xi_2\xi_3 &= -c. \end{aligned}$$

Θέτουμε $\theta_1 = (\xi_1 + \xi_2)/2$, $\theta_2 = (\xi_1 + \xi_3)/2$ και $\theta_3 = (\xi_2 + \xi_3)/2$ και βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 &= \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = -a, \\ \theta_1\theta_2 + \theta_1\theta_3 + \theta_2\theta_3 &= \frac{1}{4}\left((\xi_1 + \xi_2 + \xi_3)^2 + (\xi_1\xi_2 + \xi_1\xi_3 + \xi_2\xi_3)\right) = \frac{1}{4}(a^2 + b), \\ \theta_1\theta_2\theta_3 &= \frac{1}{8}\left((\xi_1 + \xi_2 + \xi_3)(\xi_1\xi_2 + \xi_1\xi_3 + \xi_2\xi_3) - \xi_1\xi_2\xi_3\right) = \frac{1}{8}(c - ab). \end{aligned}$$

Έπεται ότι το $Q(x)$ έχει τις διακεκριμένες πραγματικές ρίζες $\theta_1, \theta_2, \theta_3$.

Πρόβλημα 4: Ας εξισώσουμε τους συντελεστές του x^m στα δύο μέλη της ισότητας

$$(ax + b)^m(1 + x)^n = ((a - b)x + b(1 + x))^m\,(1 + x)^n.$$

Αφού

$$(ax + b)^m(1 + x)^n = \left(\sum_{i=0}^{m}\binom{m}{i}(ax)^{m-i}b^i\right)\left(\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}x^j\right),$$

από το αριστερό μέλος προκύπτει το αριστερό μέλος της προτεινόμενης ταυτότητας. Ομοίως για τα δεξιά μέλη, αφού

$$((a - b)x + b(1 + x))^m\,(1 + x)^n = \sum_{i=0}^{m}\binom{m}{i}(a - b)^{m-i}x^{m-i}b^i(1 + x)^{n+i}.$$

Πρόβλημα 5: Στο σύνολο των κορυφών $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ του δένδρου T ορίζουμε τη διμελή σχέση $\preceq$ θέτοντας $v_i \preceq v_j$ αν το μοναδικό μονοπάτι στο T με άκρα v_1 και v_j διέρχεται από το v_i. Ορίζουμε τους $n \times n$ πίνακες

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & -2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & -2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

και $Z = (z_{ij})$ με

$$z_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{αν } v_i \preceq v_j, \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Θα δείξουμε ότι $D = Z^t A Z$. Έστω $d(v_i, v_j)$ η απόσταση των κορυφών v_i και v_j στο δένδρο T. Τότε,

$$d(v_i, v_j) = d(v_1, v_i) + d(v_1, v_j) - 2d(v_1, v_p)$$

για όλα τα $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, όπου v_p είναι η μοναδική κορυφή του T με την ιδιότητα $v_k \preceq v_i$ και $v_k \preceq v_j$ αν και μόνο αν $v_k \preceq v_p$, και

$$d(v_1, v_i) = \#\{\, k \in \{2, 3, \ldots, n\} : v_k \preceq v_i\}$$

για κάθε $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Ας υπολογίσουμε τώρα το (i, j)-στοιχείο του πίνακα $Z^t A Z$. Έστω $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ και έστω η κορυφή $v_p \in V$, όπως προηγουμένως. Σύμφωνα με τους ορισμούς των A και Z,

$$\begin{aligned} (Z^t A Z)_{ij} &= \sum_{k=1}^{n} \sum_{\ell=1}^{n} z_{ki}\, a_{k\ell}\, z_{\ell j} = \sum_{v_k \preceq v_i,\, v_\ell \preceq v_j} a_{k\ell} \\ &= \#\{\, k \in \{2, 3, \ldots, n\} : v_k \preceq v_i\} + \#\{\, \ell \in \{2, 3, \ldots, n\} : v_\ell \preceq v_j\} - 2\,\#\{\, m \in \{2, 3, \ldots, n\} : v_m \preceq v_p\} \\ &= d(v_1, v_i) + d(v_1, v_j) - 2d(v_1, v_p) = d(v_i, v_j). \end{aligned}$$

Επιλέγουμε τώρα μια αναδιάταξη $(v_2, \ldots, v_n)$ του συνόλου $V \setminus \{v_1\}$ τέτοια ώστε $v_i \preceq v_j \Rightarrow i \leq j$ (αυτό δε μεταβάλλει την ορίζουσα του πίνακα D). Με την προϋπόθεση αυτή, ο πίνακας Z είναι άνω τριγωνικός με στοιχεία επί της κύριας διαγωνίου ίσα με 1, οπότε $\det(Z) = 1$. Άρα, $\det(D) = \det(Z^t A Z) = \det(A) = (-1)^{n-1}(n-1)2^{n-2}$.