Προβλήματα για τον διαγωνισμό επιλογής για τον IMC

28 Ιουνίου 2023

Πρόβλημα 1. Συμβολίζουμε με $a(n,k)$ το πλήθος των επί απεικονίσεων $f : \{1,2,\dots,n\} \to \{1,2,\dots,k\}$. Δείξτε ότι

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} a(n,k) = 1$$

για κάθε θετικό ακέραιο n.

Πρόβλημα 2. Συμβολίζουμε με $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ το σύνολο των 2×2 πινάκων με στοιχεία ακέραιους αριθμούς. Αν $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ και για κάθε $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ με $AB = BA$ η ορίζουσα $\det(A^2 + B^2)$ είναι ίση με το τετράγωνο κάποιου ακέραιου αριθμού, δείξτε ότι $(\operatorname{tr} A)^2 = 4\det(A)$, όπου $\operatorname{tr} A$ είναι το ίχνος του πίνακα A.

Πρόβλημα 3. Βρείτε όλα τα πολυώνυμα $p(x) \in \mathbb{C}[x]$ που επαληθεύουν την ταυτότητα

$$(p(x))^2 - (p(y))^2 = p(x-y)p(x+y)$$

στο $\mathbb{C}[x,y]$.

Πρόβλημα 4. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to [0,+\infty]$ τέτοια ώστε $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$. Υπολογίστε το όριο

$$\lim_{n\to\infty} \int\int\cdots\int_{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\le 1} f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)\,dx_1 dx_2\cdots dx_n.$$

Πρόβλημα 5. Δίνονται $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, όπου $n \ge 2$. Δείξτε ότι υπάρχει $c \ge 0$ τέτοιο ώστε

$$|m_1\alpha_1 + m_2\alpha_2 + \cdots + m_n\alpha_n| \le \frac{c}{(|m_1| + |m_2| + \cdots + |m_n|)^{n-1}}$$

για άπειρου πλήθους μη μηδενικές n-άδες $(m_1, m_2, \dots, m_n) \in \mathbb{Z}^n$.

Η διάρκεια της εξέτασης είναι 3 ώρες. **ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!**

Λύσεις

Πρόβλημα 1: *Πρώτη λύση.* Θεωρούμε την ταυτότητα

$$x^n = \sum_{k=1}^{n} S(n,k)\, x(x-1)(x-2)\cdots(x-k+1),$$

όπου $S(n,k)$ είναι οι αριθμοί Stirling του δεύτερου είδους (Πρόταση 4.3.2 στο [Χ. Αθανασιάδης, Διακριτά Μαθηματικά, Εφαλτήριο, 2023]). Θέτοντας $x = -1$ παίρνουμε ότι $(-1)^n = \sum_{k=1}^{n}(-1)^k k! S(n,k)$ και λαμβάνοντας υπόψη ότι $a(n,k) = k!S(n,k)$ (Πρόταση 3.1 (β) του ίδιου συγγράμματος) έπεται το ζητούμενο.

Δεύτερη λύση. Συμβολίζουμε με $f(n)$ το αριστερό μέλος της προτεινόμενης ταυτότητας, οπότε

$$f(n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} k! S(n,k),$$

όπως εξηγήθηκε στην πρώτη λύση. Υπολογίζουμε την εκθετική γεννήτρια συνάρτηση του $f(n)$ ως

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 1} f(n)\frac{x^n}{n!} &= \sum_{n\geq 1}\left(\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}k!S(n,k)\right)\frac{x^n}{n!} = \sum_{k\geq 1}(-1)^k\left(\sum_{n\geq k} k!S(n,k)\frac{(-x)^n}{n!}\right) = \sum_{k\geq 1}(-1)^k(e^{-x}-1)^k \\ &= -1 + \sum_{k\geq 0}(1-e^{-x})^k = e^x - 1 = \sum_{n\geq 1}\frac{x^n}{n!}\end{aligned}$$

και συμπεραίνουμε ότι $f(n) = 1$ για κάθε $n \geq 1$. Καθοδόν εφαρμόσαμε τη γνωστή ταυτότητα

$$\sum_{n\geq k} S(n,k)\frac{x^n}{n!} = \frac{(e^x-1)^k}{k!}$$

(βλ. Πρόταση 6.5.3 του προαναφερθέντος συγγράμματος).

Πρόβλημα 2: Εφαρμόζουμε την υπόθεση για τον πίνακα $B = kI_2$ με $k \in \mathbb{Z}$, ο οποίος μετατίθεται με τον A. Υπολογίζουμε ότι

$$\begin{aligned}\det(A^2+B^2) &= k^4 + \left((\operatorname{tr}A)^2 - 2\det(A)\right)k^2 + (\det(A))^2 \\ 4\det(A^2+B^2) &= \left(2k^2 + (\operatorname{tr}A)^2 - 2\det(A)\right)^2 + (\operatorname{tr}A)^2\left(4\det(A) - (\operatorname{tr}A)^2\right).\end{aligned}$$

Για να είναι αυτή η παράσταση τετράγωνο ακεραίου για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ θα πρέπει $4\det(A) - (\operatorname{tr}A)^2 = 0$, αφού κάθε μη μηδενικός ακέραιος m μπορεί να γραφεί στη μορφή $m = x^2 - y^2$ μόνο για πεπερασμένου πλήθους ζεύγη $(x,y) \in \mathbb{Z}^2$.

Πρόβλημα 3: Θα δείξουμε ότι τα πολυώνυμα με την επιθυμητή ιδιότητα είναι εκείνα της μορφής $p(x) = ax$, με $a \in \mathbb{C}$. Θέτοντας πρώτα $x = y = 0$ στη δοσμένη ταυτότητα προκύπτει ότι $p(0) = 0$. Έπειτα, παραγωγίζοντας ως προς x και θέτοντας $x = y$ παίρνουμε ότι $2p'(x)p(x) = p'(0)p(2x)$. Αν $p'(0) = 0$, τότε το $p(x)$ είναι σταθερό πολυώνυμο και συνεπώς ταυτοτικά ίσο με $p(0) = 0$. Διαφορετικά, το $p(x)$ έχει θετικό βαθμό, έστω n. Εξισώνοντας τους βαθμούς των $2p'(x)p(x)$ και $p'(0)p(2x)$ βρίσκουμε ότι $2n - 1 = n$, οπότε $n = 1$. Άρα, $p(x) = ax$ με $a = p'(0) \in \mathbb{C}$.

Πρόβλημα 4: *Πρώτη λύση.* Έστω I_n το ολοκλήρωμα του οποίου το όριο για $n \to \infty$ ζητείται να υπολογιστεί. Επιλέγουμε θετικό ακέραιο k αρκετά μεγάλο, έτσι ώστε $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx \leq 1/2$ για $a = 1/\sqrt{k}$.

Παρατηρούμε ότι για $n > k$, αν $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \le 1$, τότε το πολύ k από τα $|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|$ είναι $\ge a$. Άρα, η μοναδιαία μπάλα στον $\mathbb{R}^n$ με κέντρο το O περιέχεται στην ένωση των $\binom{n}{k}$ χωρίων του $\mathbb{R}^n$ της μορφής $\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : |x_{i_1}|, |x_{i_2}|, \ldots, |x_{i_{n-k}}| \le a\}$, όπου $1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_{n-k} \le n$, και συνεπώς

$$\begin{aligned} I_n &\le \binom{n}{k} \int \int \cdots \int_{|x_1|,|x_2|,\ldots,|x_{n-k}| \le a} f(x_1) f(x_2) \cdots f(x_n)\, dx_1 dx_2 \cdots dx_n \\ &= \binom{n}{k} \left(\int_{-a}^{a} f(x)\, dx \right)^{n-k} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx \right)^{k} \le \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2} \right)^{n-k} \le \frac{(2n)^k}{k! 2^n}. \end{aligned}$$

Έπεται ότι $\lim_{n\to\infty} I_n = 0$.

Δεύτερη λύση. Θεωρούμε ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές $(X_i)_{i\ge 1}$, καθεμία με πυκνότητα f. Έστω $M > 0$ τέτοιο ώστε $\int_{-M}^{M} f(x)\, dx > 0$. Θέτουμε $Y_i := X_i \mathbf{1}_{|X_i| \le M}$ για κάθε $i \ge 1$ και $S_n := Y_1^2 + Y_2^2 + \cdots + Y_n^2$. Έχουμε $E(Y_1^2) > 0$ από την επιλογή του M. Τότε, το δοσμένο πολλαπλό ολοκλήρωμα ισούται με $\mathbf{P}(X_1^2 + \cdots + X_n^2 \le 1)$, το οποίο είναι $\le \mathbf{P}(S_n \le 1)$, και αυτό ισούται με

$$\mathbf{P}\{S_n - \mathbf{E} S_n \le 1 - \mathbf{E}(S_n)\} \le \frac{\mathrm{Var}(S_n)}{\{\mathbf{E}(S_n) - 1\}^2} = \frac{n \mathrm{Var}(Y_1^2)}{\{n\mathbf{E}(Y_1^2) - 1\}^2} \overset{n\to\infty}{\to} 0.$$

Η ανισότητα (που προκύπτει ως εφαρμογή της ανισότητας Chebyshev) ισχύει για όλα τα $n > 1/\mathbf{E}(Y_1^2)$. Στην ισότητα χρησιμοποιήσαμε το ότι οι $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες. Η διασπορά της Y_1^2 είναι πεπερασμένη αφού η Y_1 είναι φραγμένη τυχαία μεταβλητή.

Πρόβλημα 5: Για κάθε θετικό ακέραιο N θεωρούμε τις n-άδες $(m_1, m_2, \ldots, m_n) \in \{0, 1, \ldots, N\}^n$ και τους αντίστοιχους γραμμικούς συνδυασμούς $\sum_{i=1}^n m_i \alpha_i$. Υπάρχουν συνολικά $(N+1)^n$ τέτοιες n-άδες και για κάθε τέτοια $|\sum_{i=1}^n m_i \alpha_i| \le AN$, όπου $A = \sum_{i=1}^n |\alpha_i|$. Άρα, για δύο διαφορετικές n-άδες, έστω $(p_1, p_2, \ldots, p_n), (q_1, q_2, \ldots, q_n) \in \{0, 1, \ldots, N\}^n$,

$$\left| \sum_{i=1}^n p_i \alpha_i - \sum_{i=1}^n q_i \alpha_i \right| \le \frac{2AN}{(N+1)^n - 1} < \frac{2A}{N^{n-1}}.$$

Θέτοντας $m_i = p_i - q_i$ για $1 \le i \le n$, δείξαμε ότι υπάρχει μη μηδενικό διάνυσμα $(m_1, m_2, \ldots, m_n) \in \{-N, -N+1, \ldots, N\}^n$ τέτοιο ώστε

$$\left| \sum_{i=1}^n m_i \alpha_i \right| < \frac{2A}{N^{n-1}} \le \frac{2A n^{n-1}}{\left(\sum_{i=1}^n |m_i| \right)^{n-1}}.$$

Αφού ο θετικός ακέραιος N είναι τυχαίος, έχουμε βρει άπειρου πλήθους n-άδες που ικανοποιούν τη ζητούμενη συνθήκη, εκτός αν υπάρχει μη μηδενικό διάνυσμα $(m_1, m_2, \ldots, m_n) \in \mathbb{Z}^n$ τέτοιο ώστε

$$\left| \sum_{i=1}^n m_i \alpha_i \right| < \frac{2A}{N^{n-1}}$$

για άπειρες τιμές του N. Τότε όμως $\sum_{i=1}^n m_i \alpha_i = 0$ και το ζητούμενο είναι τετριμμένο.