Προβλήματα για τον διαγωνισμό επιλογής για τον IMC

2 Ιουλίου 2022

Πρόβλημα 1. Έστω $(x_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία πραγματικών αριθμών με $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. Αποδείξτε ότι υπάρχουν $\epsilon_n \in \{-1, 1\}$ τέτοια ώστε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n x_n$ να συγκλίνει.

Πρόβλημα 2. Δίνεται $n \times n$ πίνακας A κάθε στοιχείο του οποίου είναι ίσο με 0 ή 1. Αν δεν υπάρχει υποπίνακας του A της μορφής

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

δείξτε ότι το άθροισμα των στοιχείων του A είναι μικρότερο του $n^{3/2} + n/2$.

Πρόβλημα 3. Διαθέτουμε 50 μαύρα και 50 λευκά σφαιρίδια και δύο κάλπες, Α και Β. Τοποθετούμε μερικά σφαιρίδια στην Α και τα υπόλοιπα στην Β αλλά με τρόπο ώστε κάθε κάλπη να περιέχει τουλάχιστον ένα σφαιρίδιο. Έπειτα επιλέγουμε μια κάλπη στην τύχη (πιθανότητα 1/2 για την καθεμία) και επιλέγουμε στην τύχη ένα σφαιρίδιο. Πώς πρέπει να κατανείμουμε τα σφαιρίδια στην αρχή στις δύο κάλπες ώστε να μεγιστοποιηθεί η πιθανότητα στο τέλος να επιλεγεί λευκό σφαιρίδιο.

Πρόβλημα 4. Δίνεται ο $n \times n$ πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Υπολογίστε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του γραμμικού ενδομορφισμού $L_A : \mathbb{C}^{n\times n} \to \mathbb{C}^{n\times n}$ του $\mathbb{C}^{n\times n}$ που ορίζεται θέτοντας $L_A(X) = AX - XA$ για $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$.

Πρόβλημα 5. Έστω $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}^+$ κυρτή συνάρτηση με $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. Αποδείξτε ότι, για κάθε $a > 0$,

$$\int_0^\infty f(x) \cos(ax)\, dx \geqslant 0.$$

Η διάρκεια της εξέτασης είναι 3 ώρες. **ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!**

Λύσεις

Πρόβλημα 1: Αποδεικνύουμε αρχικά το έξής: αν $y_1, \dots, y_N \in \mathbb{R}$ με $|y_j| \leqslant 1$ για κάθε $1 \leqslant j \leqslant N$ τότε υπάρχουν πρόσημα $\epsilon_j \in \{-1, 1\}$ τέτοια ώστε

$$\max_{1 \leqslant k \leqslant N} |\epsilon_1 y_1 + \cdots + \epsilon_k y_k| \leqslant 1.$$

Αυτό ελέγχεται εύκολα για $N = 1, 2$. Υποθέτουμε ότι ισχύει για τον $N - 1 \geqslant 2$ και το δείχνουμε για τον N.

Θεωρούμε τους y_{N-1}, y_N και παρατηρούμε ότι τουλάχιστον ένας από τους $y_{N-1} \pm y_N$ έχει απόλυτη τιμή $\leqslant 1$ (αν είναι ομόσημοι ο $y_{N-1} - y_N$ και αν είναι ετερόσημοι ο $y_{N-1} + y_N$). Ας πούμε ότι $|y_{N-1} + \epsilon y_N| \leqslant 1$ όπου $\epsilon \in \{-1, 1\}$. Ορίζουμε $y'_j = y_j$ αν $1 \leqslant j \leqslant N - 2$ και $y'_{N-1} = y_{N-1} + \epsilon y_N$. Από την επαγωγική υπόθεση βρίσκουμε $\delta_j \in \{-1, 1\}$ ώστε

$$\max_{1 \leqslant k \leqslant N-1} |\delta_1 y'_1 + \cdots + \delta_k y'_k| \leqslant 1$$

και τότε

$$\max_{1 \leqslant k \leqslant N} |\epsilon_1 y_1 + \cdots + \epsilon_k y_k| \leqslant 1,$$

όπου $\epsilon_{N-1} = \delta_{N-1}$, $\epsilon_N = \delta_{N-1}\epsilon$ και $\epsilon_k = \delta_k$ για $k \in \{1, \dots, N-2\}$.

Τώρα χρησιμοποιώντας την $x_n \to 0$ βρίσκουμε γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών N_k ώστε $|x_n| \leqslant \frac{1}{2^k}$ για κάθε $n \geqslant N_k$. Εφαρμόζοντας τον ισχυρισμό για τα $x_{N_k}, \dots, x_{N_{k+1}-1}$ βρίσκουμε πρόσημα ϵ_n, $N_k \leqslant n < N_{k+1}$ ώστε

$$\max_{N_k \leqslant m < N_{k+1}} \left| \sum_{n=N_k}^{m} \epsilon_n x_n \right| \leqslant \frac{1}{2^k}.$$

Από το κριτήριο Cauchy βλέπουμε ότι η $\sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n x_n$ συγκλίνει.

Πρόβλημα 2: Για $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, έστω S_i το σύνολο των $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ για τα οποία το (i, j)-στοιχείο του A είναι ίσο με 1. Συμβολίζουμε με $\binom{S}{2}$ το σύνολο των υποσυνόλων με δύο στοιχεία του S και παρατηρούμε ότι, σύμφωνα με την υπόθεση του προβλήματος, τα $\binom{S_i}{2}$ για $1 \leq i \leq n$ είναι ανά δύο ξένα μεταξύ τους. Θέτοντας $a_i = |S_i|$ για $1 \leq i \leq n$, συμπεραίνουμε ότι

$$\sum_{i=1}^{n} \binom{a_i}{2} \leq \binom{n}{2},$$

δηλαδή ότι

$$a_1(a_1 - 1) + a_2(a_2 - 1) + \cdots + a_n(a_n - 1) \leq n(n-1).$$

Από αυτό και την ανισότητα $(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2 \leq n(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)$ έπεται το ζητούμενο άνω φράγμα για το $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$.

Πρόβλημα 3: Τοποθετούμε ένα λευκό σφαιρίδιο στην κάλπη Α και τα υπόλοιπα 99 σφαιρίδια στην κάλπη Β. Αυτό δίνει πιθανότητα για λευκό σφαιρίδιο

$$P_\Lambda = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{49}{50}\right) = \frac{74}{99}.$$

Δείχνουμε ότι αυτή είναι η μέγιστη πιθανότητα. Αρκεί να δείξουμε ότι η πιθανότητα, P_M, για μαύρο σφαιρίδιο είναι τουλάχιστον 25/99. Πάμε στην κάλπη όπου το πλήθος των μαύρων σφαιριδίων είναι τουλάχιστον όσο το πλήθος των λευκών (στη μια κάλπη είναι πλειοψηφία τα λευκά, στην άλλη τα μαύρα, εκτός αν είναι ισοπληθικά και στις δύο). Μπορούμε να υποθέσουμε ότι αυτή είναι η κάλπη Α και περιέχει x λευκά και y μαύρα σφαιρίδια. Επομένως, $y \geq x$ και η πιθανότητα για μαύρο σφαιρίδιο είναι

$$P_M = \frac{1}{2}\left(\frac{y}{x+y} + \frac{50-y}{100-(x+y)}\right).$$

[Η περίπτωση $x+y=0$ ή $x+y=100$ αποκλείεται από την υπόθεση.]
Αν $y=x$, έχουμε $P_M = 1/2(1/2+1/2) = 1/2$ που είναι $> 25/99$.
Αν $y > x$, ασχολούμαστε μόνο με την κάλπη Α, δηλαδή παρατηρούμε ότι

$$P_M \geq \frac{1}{2}\frac{y}{x+y} =: g(x,y).$$

Δείχνουμε ότι η g ελαχιστοποιείται για $x=49$ και $y=50$. Η g είναι γνησίως φθίνουσα συνάρτηση του x (έχουμε $y>0$). Επομένως, αν πάρει το ελάχιστό της σε ένα σημείο (x_0, y_0), πρέπει $x_0 = y_0 - 1$. Έτσι

$$g(x, x+1) = \frac{1}{2}\frac{x+1}{2x+1},$$

που είναι γνησίως φθίνουσα συνάρτηση του x. Παίρνει το ελάχιστό της στη μέγιστη επιτρεπόμενη τιμή του x, που είναι 49, και τότε $y=50$, ενώ η $g(49,50) = 25/99$.

Πρόβλημα 4: Θα δείξουμε ότι ο L_A είναι μηδενοδύναμος, δηλαδή ότι $(L_A)^m = O$ για κάποιο θετικό ακέραιο m. Κατά συνέπεια, για το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του L_A έχουμε $\det(L_A - xI) = (-x)^{n^2}$.

Για κάθε θετικό ακέραιο k και $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$, ο πίνακας $(L_A)^k(X)$ είναι γραμμικός συνδυασμός πινάκων της μορφής A^iXA^j με $i, j \in \mathbb{N}$ και $i+j=k$. Επειδή $A^n = O$, έπεται ότι $(L_A)^{2n-1} = O$.

Πρόβλημα 5: Κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής $y = ax$ μπορούμε να υποθέσουμε ότι $a=1$. Για κάθε $k \geqslant 0$ γράφουμε

$$\int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} f(x)\cos x\,dx = \int_0^{2\pi} f(2k\pi+y)\cos y\,dy.$$

Η $f_k(y) = f(2k\pi+y)$ είναι κυρτή στο $[0,\pi]$ και

$$\int_0^{2\pi} f_k(y)\cos y\,dy = \int_0^{\pi} f_k(y)\cos y\,dy + \int_0^{\pi} f_k(2\pi - z)\cos z\,dz = \int_0^{\pi} [f_k(y) + f_k(2\pi-y)]\cos y\,dy.$$

Από το λήμμα των τριών χορδών, αν $0 \leqslant y < z \leqslant \pi$ τότε $f_k(2\pi-y) - f_k(z) \geqslant f_k(2\pi-z) - f_k(y)$, δηλαδή $f_k(y) + f_k(2\pi-y) \geqslant f_k(z) + f_k(2\pi-z)$. Δηλαδή, η $g_k(y) = f_k(y) + f_k(2\pi-y)$ είναι φθίνουσα στο $[0,\pi]$. Η $\cos y$ είναι επίσης φθίνουσα στο $[0,\pi]$, άρα η ανισότητα του Chebyshev δίνει

$$\int_0^{\pi} g_k(y)\cos y\,dy \geqslant \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} g_k(y)\,dy \cdot \int_0^{\pi}\cos y\,dy = 0.$$

Τώρα βλέπουμε ότι αν

$$A(x) = \int_0^x f(y)\cos y\,dy, \qquad y>0$$

έχουμε ότι η ακολουθία $A(2n\pi)$ είναι μη αρνητική και αύξουσα, άρα $A(2n\pi) \to \ell \geqslant 0$. Χρησιμοποιώντας και την $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ συμπεραίνουμε ότι το

$$\int_0^{\infty} f(x)\cos x\,dx = \lim_{x\to\infty} A(x) = \lim_{n\to\infty} A(2n\pi) = \ell \geqslant 0.$$