Προβλήματα για το διαγωνισμό επιλογής για τη Μαθηματικό Διαγωνισμό IMC 2017

Ιούνιος 2017

Πρόβλημα 1: Έστω $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία στο $[0,\infty)$ τέτοια ώστε $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει. Δείξτε ότι υπάρχει ακολουθία $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο $[0,\infty)$ τέτοια ώστε $b_n \to \infty$ και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ συγκλίνει.

Πρόβλημα 2: Δίνεται $n \times n$ πίνακας της μορφής

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

με στοιχεία από ένα σώμα $\mathbb{F}$. Αν ο A είναι διαγωνίσιμος επί του $\mathbb{F}$, δείξτε ότι οι ιδιοτιμές του είναι ανά δύο διαφορετικά στοιχεία του $\mathbb{F}$.

Πρόβλημα 3: Έστω $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μία αρίθμηση των ρητών στο $[0,1]$. Δείξτε ότι η συνάρτηση $f\colon [0,1] \to [0,1]$ με τύπο

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}:\, r_n < x} 2^{-n},$$

είναι συνεχής αν περιοριστεί στο σύνολο $[0,1] \setminus \mathbb{Q}$ των αρρήτων στο $[0,1]$, αλλά δεν επεκτείνεται σε συνεχή συνάρτηση στο $[0,1]$.

Πρόβλημα 4: Αν $f(x) \in \mathbb{Z}[t]$ είναι μονικό πολυώνυμο όλες οι μιγαδικές ρίζες του οποίου έχουν μέτρο 1, δείξτε ότι όλες οι ρίζες του $f(x)$ είναι ρίζες της μονάδας.

Η διάρκεια της εξέτασης είναι 3 ώρες. **ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!**

Λύσεις

Πρόβλημα 1:

Έστω $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία μη αρνητικών όρων τέτοια ώστε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ να συγκλίνει. Έστω και $s_n := \sum_{m=1}^{n} a_m$, $n \in \mathbb{N}$, το n-στο μερικό άθροισμα και $s := \sum_{m=1}^{\infty} a_m$ το συνολικό άθροισμα της σειράς. Τότε $s - s_n \downarrow 0$ και άρα για κάθε $k \in \mathbb{N}$, υπάρχει $n_k \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $0 \le s - s_{n_k} < 1/k^3$. Ορίζουμε $b_n = k$ για $n \in [n_k, n_{k+1}) \cap \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$, $b_n = 1$ για $n \in [1, n_1) \cap \mathbb{N}$, και έστω $s'_n := \sum_{m=1}^{n} a_m b_m$, $n \in \mathbb{N}$, το n-στο μερικό άθροισμα της σειράς $\sum_m a_m b_m$. Τότε, για $n \in [n_k, n_{k+1}) \cap \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} s'_n &= s_1 + \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{m=n_j}^{n_{j+1}} a_m b_m + \sum_{m=n_k}^{n} a_m b_m = s_1 + \sum_{j=1}^{k-1} j \sum_{m=n_j}^{n_{j+1}} a_m + k \sum_{m=n_k}^{n} a_m \\ &= s_1 + \sum_{j=1}^{k-1} j(s_{n_j+1} - s_{n_j}) + k(s_n - s_{n_k}) \le s_1 + \sum_{j=1}^{k-1} j(s - s_{n_j}) + k(s - s_{n_k}) \\ &\le s_1 + \sum_{j=1}^{k} j^{-2} \le s_1 + \sum_{j=1}^{\infty} j^{-2} = s_1 + \frac{\pi^2}{6} < \infty. \end{aligned}$$

Επομένως η σειρά $\sum_{m=1}^{\infty} a_m b_m$ συγκλίνει και προφανώς $b_m \to \infty$.

Πρόβλημα 2:

Αφού ο A είναι διαγωνίσιμος επί του $\mathbb{F}$, υπάρχει βάση $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ του $\mathbb{F}^{n\times 1}$ για την οποία $A \cdot e_i = \lambda_i e_i$ για $1 \le i \le n$ για κάποια $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{F}$. Θα δείξουμε ότι τα $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ είναι ανά δύο διαφορετικά στοιχεία του $\mathbb{F}$. Θέτουμε

$$v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

και παρατηρούμε ότι

$$v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad Av = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \ldots \quad, \quad A^{n-1}v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Γράφοντας $v = c_1 e_1 + c_2 e_2 + \cdots + c_n e_n$, με $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{F}$, βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} v &= c_1 e_1 + c_2 e_2 + \cdots + c_n e_n, \\ Av &= c_1 \lambda_1 e_1 + c_2 \lambda_2 e_2 + \cdots + c_n \lambda_n e_n, \\ &\vdots \\ A^{n-1}v &= c_1 \lambda_1^{n-1} e_1 + c_2 \lambda_2^{n-1} e_2 + \cdots + c_n \lambda_n^{n-1} e_n. \end{aligned}$$

Από τη γραμμική ανεξαρτησία των $v, Av, \ldots, A^{n-1}v$ έπεται ότι

$$\det \begin{pmatrix} c_1 & c_1\lambda_1 & \cdots & c_1\lambda_1^{n-1} \\ c_2 & c_2\lambda_2 & \cdots & c_2\lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_n & c_n\lambda_n & \cdots & c_n\lambda_n^{n-1} \end{pmatrix} \neq 0$$

και συνεπώς ότι $\lambda_i \neq \lambda_j$ για $i \neq j$.

Πρόβλημα 3:
Έστω πρώτα $x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}$ άρρητος. Έστω και $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$\sum_{n>n_\varepsilon} 2^{-n} = 2^{-n_\varepsilon} < \varepsilon.$$

Τότε $\{x\} \cap \{r_1, \ldots, r_{n_\varepsilon}\} = \varnothing$ και άρα $\delta := \min_{n\in\{1,\ldots,n_\varepsilon\}} |x - r_n|$ ικανοποιεί $\delta > 0$. Αν $y \in [0,1]$ και $|y - x| < \delta$ τότε το διάστημα μεταξύ x και y, συμπεριλαμβανομένου του y, δεν μπορεί να περιέχει κανέναν από τους ρητούς $r_1, \ldots, r_{n_\varepsilon}$· άρα

$$0 \leq f(x) - f(y) = \sum_{n\in\mathbb{N}:\, y\leq r_n<x} 2^{-n} \leq \sum_{n>n_\varepsilon} 2^{-n} < \varepsilon,$$

αν $y < x$, και

$$0 \leq f(y) - f(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}:\, x\leq r_n<y} 2^{-n} \leq \sum_{n>n_\varepsilon} 2^{-n} < \varepsilon,$$

αν $y > x$. Σε κάθε περίπτωση

$$y \in (x-\delta, x+\delta) \cap [0,1] \quad \Rightarrow \quad |f(y) - f(x)| < \varepsilon$$

και έπεται ότι η f είναι συνεχής στο x. Επομένως και ο περιορισμός $f|_{[0,1]\setminus\mathbb{Q}}$ της f στους άρρητους στο $[0,1]$ είναι συνεχής στο x.

Αν τώρα $x \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$, τότε $x = r_N$ για κάποιο $N \in \mathbb{N}$. Τότε, για κάθε $z < r_N < y$ με $z, y \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}$,

$$f(y) - f(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}:\, z\leq r_n<y} 2^{-n} > 2^{-N},$$

και άρα ο περιορισμός της $f|_{[0,1]\setminus\mathbb{Q}}$ της f στους άρρητους στο $[0,1]$ δεν έχει όριο στο x. Επομένως ο περιορισμός αυτός $f|_{[0,1]\setminus\mathbb{Q}}$ της f στους άρρητους στο $[0,1]$ δεν έχει συνεχή επέκταση στο $[0,1]$.

Πρόβλημα 4:

Έστω $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ οι ρίζες του $f(x)$. Για κάθε ακέραιο $\ell > 0$ το πολυώνυμο

$$f_\ell(t) \;=\; \prod_{i=1}^{k} (t - \alpha_i^\ell)$$

έχει συντελεστές στο $\mathbb{Z}$, από θεωρία Galois ή από το θεώρημα του Newton. Ας γράψουμε

$$f_\ell(t) \;=\; t^k + a_{k-1}t^{k-1} + \cdots + a_0.$$

Ισχύει ότι $|a_j| \leq \binom{k}{j}$ κάνοντας χρήση των τύπων Vieta και της υπόθεσης $|\alpha_i| = 1$. Αφού μόνο πεπερασμένα το πλήθος πολυώνυμα με συντελεστές στο $\mathbb{Z}$ ικανοποιούν αυτές τις ανισότητες, για κάποια $m \neq \ell$ έχουμε

$$f_m(t) \;=\; f_\ell(t).$$

Συνεπώς, για κάποια μετάθεση σ του $\{1, 2, \ldots, k\}$ έχουμε

$$\alpha_j^{\ell} \;=\; \alpha_{\sigma(j)}^{m}$$

και επαγωγικά

$$\alpha_j^{\ell^r} \;=\; \alpha_{\sigma^r(j)}^{m^r}.$$

Αφού δε $\sigma^{k!} = \mathrm{Id}$ έχουμε

$$\alpha_j^{\ell^{k!}} \;=\; \alpha_j^{m^{k!}}$$

από όπου προκύπτει το ζητούμενο.