Προβλήματα για το διαγωνισμό επιλογής για τη Μαθηματικό Διαγωνισμό IMC 2015

10 Ιουνίου 2015

Πρόβλημα 1: Δείξτε ότι ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3331 & 6661 & 9991 \\ 9332 & 2662 & 5992 & 8002 \\ 8663 & 2993 & 4333 & 7003 \\ 7994 & 1004 & 4334 & 6664 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$$

είναι αντιστρέψιμος.

Πρόβλημα 2: Δίνεται σώμα F χαρακτηριστικής $p \equiv 1 \pmod 4$.

(α) Δείξτε ότι το -1 είναι τέλειο τετράγωνο στο F.

(β) Δείξτε ότι κάθε μη μηδενικό στοιχείο του F μπορεί να γραφεί ως το άθροισμα των τετραγώνων τριών μη μηδενικών στοιχείων του F.

Πρόβλημα 3: Έστω $m < 0 < M$ και συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ Riemann ολοκληρώσιμη με $m \le f(x) \le M$ για κάθε $x \in [0,1]$ και $\int_0^1 f(x)\,dx = 0$. Να δειχθεί ότι
(α)

$$\left| \int_0^1 x f(x)\,dx \right| \le \frac{|m|M}{2(M-m)},$$

(β) αν για μία f η προηγούμενη ανισότητα ισχύει ως ισότητα, τότε η f δεν είναι συνεχής.

[Υποδ. για το (α): Πως μοιάζει μία f που μεγιστοποιεί το ολοκλήρωμα στο αριστερό μέλος;]

Πρόβλημα 4: Συμβολίζουμε με $a(n,k)$ το πλήθος των επί απεικονίσεων $f : \{1,2,\ldots,n\} \to \{1,2,\ldots,k\}$. Δείξτε ότι το πολυώνυμο $\sum_{k=1}^{n} a(n,k)x^k$ έχει n διακεκριμένες πραγματικές ρίζες για κάθε θετικό ακέραιο n.

Η διάρκεια της εξέτασης είναι 3 ώρες. **ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!**

Λύσεις

Πρόβλημα 1: Παρατηρούμε ότι

$$\det(A) \;\equiv\; \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \;\equiv\; 2 \pmod 3$$

και συμπεραίνουμε ότι $\det(A) \neq 0$.

Πρόβλημα 2: Το (α) είναι άμεση συνέπεια του Θεωρήματος του Wilson, το οποίο δηλώνει ότι $(p-1)! \,\equiv\, -1 \,(\mathrm{mod\,p})$. Για το (β), θέτοντας $b = 2^{-1}$ στις ταυτότητες

$$(a+b)^2 \;=\; a^2 + 2ab + b^2, \qquad (a-b)^2 \;=\; a^2 - 2ab + b^2$$

παίρνουμε

$$a \;=\; (a+b)^2 - a^2 - b^2 \;=\; a^2 + b^2 - (a-b)^2.$$

Το ζητούμενο προκύπτει παρατηρώντας ότι ένα τουλάχιστον από τα $a+b$ και $a-b$ είναι διάφορο του μηδενός και χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα του (α).

Πρόβλημα 3: (α) Θα δείξουμε την ανισότητα

$$I(f) := \int_0^1 x f(x)\, dx \le \frac{|m|M}{2(M-m)}. \tag{1}$$

Το κάτω φράγμα $-|m|M/\{2(M-m)\}$ για το ολοκλήρωμα αποδεικνύεται ανάλογα.

Μια f που θέλει να μεγιστοποιήσει την $I(f)$ θα επιδιώξει να πάρει όσο μεγαλύτερες τιμές μπορεί (δηλ. την τιμή M) σε x όσο πιο μεγάλα γίνεται στο $[0,1]$. Και για να έχει ολοκλήρωμα 0 θα πάρει και μικρές τιμές (δηλ. m) αλλά σε x κοντά στο 0. Οδηγούμαστε έτσι στο να θεωρήσουμε την συνάρτηση

$$f_a(x) = \begin{cases} m & \text{αν } x \in [0,a), \\ M & \text{αν } x \in [a,1], \end{cases}$$

Το a που την κάνει να έχει ολοκλήρωμα 0 είναι το $a = M/(M-m) \in (0,1)$. Για αυτή την επιλογή του a έχουμε

$$I(f_a) = \frac{|m|M}{2(M-m)}.$$

Τώρα για οποιανδήποτε f που ικανοποιεί τις υποθέσεις της άσκησης έχουμε

$$\begin{aligned} I(f) - I(f_a) &= \int_0^a x(f(x) - f_a(x))\, dx + \int_a^1 x(f(x) - f_a(x))\, dx \\ &\le a \int_0^a (f(x) - f_a(x))\, dx + a \int_a^1 (f(x) - f_a(x))\, dx \\ &= a \int_0^1 (f(x) - f_a(x))\, dx = 0. \end{aligned}$$

(β) Αν για μία f η ανισότητα (1) ισχύει ως ισότητα, τότε από την απόδειξη του (α) προκύπτει ότι πρέπει η f σχεδόν παντού στο $[0,a)$ να παίρνει την τιμή m και σχεδόν παντού στο $[a,1]$ να παίρνει την τιμή M. Άρα δεν μπορεί να είναι συνεχής. Όμοια επιχειρηματολογούμε και στην περίπτωση που $I(f) = -I(f_a)$.

Πρόβλημα 4: Έστω $E_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a(n,k)x^k$. Για μια επί απεικόνιση $f : \{1, 2, \ldots, n+1\} \to \{1, 2, \ldots, k\}$ υπάρχουν k επιλογές για την τιμή $b = f(n+1)$. Διακρίνοντας τις περιπτώσεις να υπάρχει ή όχι $x \in \{1, 2, \ldots, n\}$ με $f(x) = b$, βρίσκουμε ότι

$$a(n+1) \;=\; ka(n, k-1) \;+\; ka(n, k).$$

Από την αναγωγική αυτή σχέση προκύπτει ότι

$$E_{n+1}(x) \;=\; xE_n(x) + x(x+1)E_n'(x) \;=\; x\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\left((x+1)E_n(x)\right).$$

Το ζητούμενο έπεται εφαρμόζοντας το Θεώρημα του Rolle και επαγωγή στο n.