# Προβλήματα για το διαγωνισμό επιλογής για τη Μαθηματική Ολυμπιάδα IMC 2012

10 Ιουνίου 2012

**Πρόβλημα 1:** Να προσδιοριστούν αριθμοί $n \in \mathbb{N}$ και $x_1, x_2, ..., x_n > 0$ τέτοιοι ώστε:

1. $x_1 + x_2 + ... + x_n \geq 2$,
2. $x_1^3 + x_2^3 + ... + x_n^3 \leq 8/49$, και
3. το $n$ να είναι το ελάχιστο δυνατό.

**Πρόβλημα 2:** Θέτουμε

$$a_n \;=\; \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n-k}{k} (-4)^{-k}$$

για $n \in \mathbb{N}$. Βρείτε ρητούς αριθμούς $a, b, c$ τέτοιους ώστε να ισχύει $a_n = (an + b)\, c^n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

**Πρόβλημα 3:** Δίνονται πίνακες $A, B, C \in \mathbb{C}^{n \times n}$ με $AB = BA$, $AC = CA$ και $BC = CB$. Δείξτε ότι υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί $\alpha, \beta, \gamma$, όχι όλοι ίσοι με 0, τέτοιοι ώστε

$$\det(\alpha A + \beta B + \gamma C) = 0.$$

**Πρόβλημα 4:** Έστω $f : [0, 1] \to [0, \infty)$ συνεχής συνάρτηση. Να βρεθεί το όριο

$$\lim_{n \to \infty} n \int_0^1 \left( \sum_{k=n}^{\infty} \frac{x^k}{k} \right)^2 f(x)\, dx.$$

**Η διάρκεια της εξέτασης είναι 3 ώρες.** **ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!**

# Λύσεις

**Πρόβλημα 1:** Προφανώς $n > 1$. Εναλλακτικά, θέλουμε να βρούμε για ποιά $n$ το ελάχιστο της ποσότητας $f(x) := x_1^3 + \cdots + x_n^3$ στο $[0,\infty)^n \cap \{x : x_1 + \cdots + x_n \geq 2\}$ είναι μικρότερο του $8/49$. Προφανώς το ελάχιστο λαμβάνεται στο συμπαγές $K := [0,\infty)^n \cap \{x : x_1 + \cdots + x_n = 2\}$ σε μία $n$-άδα $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Παρατήρηση: $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Γιατί αν π. χ. $x_1 \neq x_2$ τότε αντικαθιστώντας στο $x$ το ζευγάρι $(x_1, x_2)$ με το

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{x_1 + x_2}{2}\right)$$

παίρνουμε ένα $\tilde{x} \in K$ με $f(\tilde{x}) < f(x)$. Αυτό γιατί για $a > 0$, το ελάχιστο της $h(x) = x^3 + (a-x)^3$ λαμβάνεται μόνο στο $a/2$, αφού $h'(x) = 3a(2x - a)$.

Άρα το ελάχιστο της $f$ στο $K$ λαμβάνεται στο $x = (2/n, 2/n, \ldots, 2/n)$ και ισούται με $8/n^2$. Η $8/n^2 \leq 8/49$ ισοδυναμεί με $n \geq 7$.

**Πρόβλημα 2:** Υπολογίζουμε τη γεννήτρια συνάρτηση $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ ως εξής:

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geq 0} a_n x^n &= \sum_{n\geq 0} \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n-k}{k} (-1/4)^k x^n = \sum_{k\geq 0} \sum_{n\geq 2k} (-1/4)^k \binom{n-k}{k} x^n \\
&= \sum_{k\geq 0} \sum_{m\geq 0} (-1/4)^k \binom{m+k}{k} x^{m+2k} = \sum_{k\geq 0} (-x^2/4)^k \sum_{m\geq 0} \binom{m+k}{k} x^m \\
&= \sum_{k\geq 0} (-x^2/4)^k \frac{1}{(1-x)^{k+1}} = \frac{1}{1-x} \sum_{k\geq 0} \left(\frac{-x^2}{4(1-x)}\right)^k \\
&= \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1 + x^2/4(1-x)} = \frac{1}{1 - x + x^2/4} = \frac{1}{(1-x/2)^2} \\
&= \sum_{n\geq 0} (n+1) \left(\frac{x}{2}\right)^n .
\end{aligned}$$

Συμπεραίνουμε ότι $a_n = (n+1)/2^n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, οπότε το ζητούμενο ισχύει με $a = b = 1$ και $c = 1/2$.

**Πρόβλημα 3:** Έστω $\lambda \in \mathbb{C}$ μια ιδιοτιμή του πίνακα $A$ και έστω $V = \{x \in \mathbb{C}^n : Ax = \lambda x\}$ ο αντίστοιχος ιδιοχώρος. Ο πίνακας $B$ αφήνει τον $V$ αναλλοίωτο, αφού για κάθε $x \in V$ ισχύει $A(Bx) = B(Ax) = B(\lambda x) = \lambda(Bx)$ και συνεπώς $Bx \in V$. Έστω $\mu \in \mathbb{C}$ μια ιδιοτιμή του περιορισμού του πίνακα $B$ στο χώρο $V$ και έστω $W = \{x \in V : Bx = \mu x\}$ ο αντίστοιχος ιδιοχώρος. Με ανάλογο τρόπο, όπως προηγουμένως, βρίσκουμε ότι ο $C$ αφήνει τον $W$ αναλλοίωτο και συνεπώς ότι έχει τουλάχιστον μία ιδιοτιμή $\nu \in \mathbb{C}$ με αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα $y \in W$. Συνοψίζοντας, δείξαμε ότι υπάρχουν $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{C}$ και μη μηδενικό διάνυσμα $y \in \mathbb{C}^n$, τέτοια ώστε $Ay = \lambda y$, $By = \mu y$ και $Cy = \nu y$.

Αφού οι τρεις μιγαδικοί αριθμοί $\lambda, \mu, \nu$ είναι γραμμικώς εξαρτημένοι επί του $\mathbb{R}$, υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί $\alpha, \beta, \gamma$, όχι όλοι ίσοι με 0, τέτοιοι ώστε $\alpha\lambda + \beta\mu + \gamma\nu = 0$. Παρατηρούμε τότε ότι $(\alpha A + \beta B + \gamma C)(y) = (\alpha\lambda + \beta\mu + \gamma\nu)(y) = 0$. Άρα, ο πίνακας $\alpha A + \beta B + \gamma C$ έχει μη τετριμμένο πυρήνα και συνεπώς η ορίζουσά του είναι ίση με μηδέν.

**Πρόβλημα 4:** Βήμα 1: Αν $f \equiv 1$, τότε το όριο ισούται με $2\log 2$.
Πράγματι

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \left( \sum_{k=n}^{\infty} \frac{x^k}{k} \right)^2 dx &= \int_0^1 \sum_{j,k=n}^{\infty} \frac{x^j x^k}{jk} dx = \sum_{j,k=n}^{\infty} \frac{1}{jk(j+k+1)} = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k} \sum_{j=n}^{\infty} \frac{1}{j(j+k+1)} \\
&= \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} \sum_{r=0}^{k} \frac{1}{n+r} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{n+r} \sum_{k=r\vee n} \frac{1}{k(k+1)} \\
&= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{n+r} \cdot \frac{1}{r \vee n} = \frac{1}{n} \sum_{r=0}^{n} \frac{1}{n+r} + \sum_{r=n+1}^{\infty} \frac{1}{n+r} \cdot \frac{1}{r} \\
&= \frac{1}{n} \sum_{r=0}^{n} \frac{1}{n+r} + \frac{1}{n} \sum_{s=1}^{n} \frac{1}{n+s} = \frac{1}{n^2} + 2\frac{1}{n} \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{n+r}.
\end{aligned}$$

Στις πιο πάνω ισότητες, τρείς φορές κάνουμε ανάλυση σε απλά κλάσματα, και χρησιμοποιούμε τηλεσκοπικότητα. Άρα

$$n \int_0^1 \left( \sum_{k=n}^{\infty} \frac{x^k}{k} \right)^2 dx = \frac{1}{n} + 2\frac{1}{n} \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{r}{n}} \to 2\int_0^1 \frac{1}{1+x}\, dx = 2\log 2.$$

Βήμα 2: Με χρήση του προηγούμενου βήματος, δείχνουμε ότι το ζητούμενο όριο ισούται με $(2\log 2) f(1)$.