Προβλήματα για το διαγωνισμό επιλογής για τη Μαθηματική Ολυμπιάδα IMC 2011

4 Ιουνίου 2011

Πρόβλημα 1: (α) Έστω $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$ οι $n-$οστές ρίζες της μονάδας και $k \in \mathbb{Z}$. Υπολογίστε το άθροισμα $\rho_1^k + \rho_2^k + \cdots + \rho_n^k$.

(β) Έστω $D := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ και έστω κυρτό υποσύνολο K του $\mathbb{C}$. Θεωρούμε το σύνολο των πολυωνύμων

$$F := \{P = P(z) \in \mathbb{C}[z] : P(D) \subseteq K\}$$

και για $n = 0, 1, 2, \dots$ θεωρούμε τα σύνολα

$$\Lambda_n := \left\{ w \in \mathbb{C} : \text{ υπάρχει } P = \sum_{j=0}^{N} p_j z^j \in F \text{ με } p_n = w \right\}.$$

Να δειχθεί ότι $\Lambda_0 = K$ και ότι $\Lambda_n = \Lambda_1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ με $n \geq 2$. Ακόμη, να δειχθεί ότι το Λ_1 είτε είναι ίσο με το $\{0\}$ ή με το $\mathbb{C}$, είτε είναι ανοικτός ή κλειστός δίσκος με κέντρο το 0 και θετική ακτίνα. Για όσες από αυτές τις περιπτώσεις μπορείτε, δώστε παράδειγμα.

Πρόβλημα 2: Έστω $(a_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία πραγματικών αριθμών με $\lim_{n\to\infty} a_n \sum_{i=1}^{n} a_i^2 = 1$. Να δειχθεί ότι $\lim_{n\to\infty} n^{1/3} a_n = 3^{-1/3}$.

Πρόβλημα 3: Έστω πίνακες $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ με $AB = BA$ και $A^{2010} = B^{2011} = I$. Να δειχθεί ότι ο πίνακας $A + B + I$ είναι αντιστρέψιμος.

Πρόβλημα 4: Έστω m, n θετικοί ακέραιοι και έστω $p_1, p_2, \dots, p_m \in \mathbb{R}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ πολυώνυμα στις μεταβλητές $x_1, x_2, \dots, x_n$ με πραγματικούς συντελεστές. Αν

$$p_1^2 + p_2^2 + \cdots + p_m^2 = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2,$$

να δειχθεί ότι $m \geq n$.

Η διάρκεια της εξέτασης είναι 3 ώρες. **ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!**