Προβλήματα για το διαγωνισμό επιλογής για τον IMC 2010

1. Έστω ακολουθία $(a_n)_{n\geq 1}$ μη αρνητικών πραγματικών αριθμών που ικανοποιεί

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k \geq \sum_{k=n+1}^{2n} a_k$$

για κάθε $n \geq 1$. Να δειχθεί ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq 2ea_1.$$

2. Έστω πολυώνυμο $P \in \mathbb{R}[x]$ τέτοιο ώστε το $P(x^{2010})$ να γράφεται ως γινόμενο πολυωνύμων με θετικούς συντελεστές. Να δειχθεί ότι και το P γράφεται ως γινόμενο πολυωνύμων με θετικούς συντελεστές.

3. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής ώστε $\int_I f(x)\,dx = 0$ για κάθε διάστημα I με μήκος 1 ή $\sqrt{2}$. Να δειχθεί ότι $f \equiv 0$.

4. Έστω $A = (a_{i,j}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ συμμετρικός πίνακας με

$$a_{i,i} = 1, \ \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| \leq 2$$

για κάθε $i = 1, 2, \ldots, n$. Να δειχθεί ότι:
(a) Για κάθε ιδιοτιμή λ του A ισχύει $|\lambda - 1| \leq 1$.
(b) $0 \leq \det(A) \leq 1$.

5. Έστω $f_1 : [0, 1] \to (0, \infty)$ συνεχής συνάρτηση. Ορίζουμε αναδρομικά

$$f_{n+1}(x) := 2\int_0^x \sqrt{f_n(t)}\,dt$$

για κάθε $n \geq 1$ και $x \in [0, 1]$. Να δειχθεί ότι $f_n(x) \to x^2$ ομοιόμορφα στο $[0, 1]$ καθώς $n \to \infty$.

Η διάρκεια της εξέτασης είναι 3 ώρες. **ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!**