ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Συμπληρωματικές Ασκήσεις
Χειμερινό Εξάμηνο 2015

Χρήστος Αθανασιάδης

Συμβολίζουμε με O το μηδενικό πίνακα καταλλήλων διαστάσεων, με I (ορισμένες φορές, με I_n) τον $n \times n$ ταυτοτικό πίνακα, με $\det(A)$ την ορίζουσα ενός τετραγωνικού πίνακα A, με $\mathbb{F}$ ένα τυχαίο σώμα και με $\mathbb{F}[x]$ το δακτύλιο των πολυωνύμων στη μεταβλητή x με συντελεστές από το $\mathbb{F}$.

Πράξεις Πινάκων

1. Δίνονται πίνακες $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{F}^{n\times p}$ και $C \in \mathbb{F}^{p\times m}$ τέτοιοι ώστε $A^t = BC$, $B^t = CA$ και $C^t = AB$. Δείξτε ότι $(ABC)^2 = ABC$.

2. Υπολογίστε τον πίνακα $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^n$ για $n \in \mathbb{N}$.

3. Δίνονται οι πίνακες $A = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ και $B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

(α) Δείξτε ότι $AB = 7I$.
(β) Υπολογίστε τον πίνακα $(BA)^n$ για $n \in \mathbb{N}$.

4. Δίνεται πίνακας $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{2\times 2}$.

(α) Δείξτε ότι $A^2 - (a + d)A + (ad - bc)\, I = O$.
(β) Βρείτε όλους τους πίνακες $A \in \mathbb{F}^{2\times 2}$ για τους οποίους $A^2 = O$.
(γ) Βρείτε όλους τους πίνακες $A \in \mathbb{F}^{2\times 2}$ για τους οποίους $A^2 = I$.
(δ) Βρείτε όλους τους πίνακες $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ για τους οποίους $A^2 = -I$.

5. Για ακεραίους $0 \le k \le n$ γράφουμε

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!},$$

όπου $m! = 1 \cdot 2 \cdots m$ για θετικούς ακεραίους m και $0! = 1$ κατά σύμβαση.

(α) Δείξτε ότι
$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$
για $1 \le k \le n-1$.

(β) Αν A, B είναι τετραγωνικοί πίνακες επί του $\mathbb{F}$ της ίδιας διάστασης και $AB = BA$, δείξτε ότι $A^m B^n = B^n A^m$ για όλα τα $m, n \in \mathbb{N}$.

(γ) Αν A, B είναι τετραγωνικοί πίνακες επί του $\mathbb{F}$ της ίδιας διάστασης και $AB = BA$, δείξτε ότι
$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}$$
για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

6. Υπολογίστε τους πίνακες

$$(\alpha) \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}^n \qquad (\beta) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^n$$

για $n \in \mathbb{N}$ και $\lambda \in \mathbb{F}$.

7. Ένας πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ λέγεται *στοχαστικός* αν τα στοιχεία του είναι μη αρνητικοί αριθμοί και το άθροισμα των στοιχείων οποιασδήποτε γραμμής του A είναι ίσο με 1.

(α) Δείξτε ότι ένας πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ με στοιχεία μη αρνητικούς αριθμούς είναι στοχαστικός αν και μόνο αν ισχύει $AX = X$, όπου $X \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ είναι ο πίνακας - στήλη όλα τα στοιχεία του οποίου είναι ίσα με 1.

(β) Συνάγετε ότι το γινόμενο δύο οποιωνδήποτε $n \times n$ στοχαστικών πινάκων είναι επίσης $n \times n$ στοχαστικός πίνακας.

8. Δίνονται πίνακες $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{F}^{n\times p}$ και $C \in \mathbb{F}^{p\times q}$.

(α) Εκφράστε το στοιχείο (i, j) του γινομένου ABC ως συνάρτηση των στοιχείων των A, B και C.

(β) Γενικότερα, έστω $A_1, A_2, \ldots, A_p$ πίνακες για τους οποίους ορίζεται το γινόμενο $A_1 A_2 \cdots A_p$. Εκφράστε το στοιχείο (i, j) του πίνακα $A_1 A_2 \cdots A_p$ ως συνάρτηση των στοιχείων των $A_1, A_2, \ldots, A_p$.

9. Έστω $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$ δύο άνω τριγωνικοί πίνακες.

(α) Δείξτε ότι ο πίνακας AB είναι επίσης άνω τριγωνικός.
(β) Αν κάθε στοιχείο στην κύρια διαγώνιο του B είναι ίσο με μηδέν, δείξτε ότι το ίδιο ισχύει για τον AB.
(γ) Αν κάθε στοιχείο στην κύρια διαγώνιο του A είναι ίσο με μηδέν, δείξτε ότι το ίδιο ισχύει για τον AB.
(δ) Αν $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathbb{F}^{n\times n}$ είναι άνω τριγωνικοί πίνακες κάθε στοιχείο στην κύρια διαγώνιο των οποίων είναι ίσο με μηδέν, δείξτε ότι $A_1A_2\cdots A_n = O$.

10. Δίνεται ο άνω τριγωνικός $n \times n$ πίνακας $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$.

(α) Υπολογίστε τους πίνακες A^2 και A^3.
(β) Υπολογίστε τον πίνακα A^m για τυχαίο $m \in \mathbb{N}$.

11. Για τυχαίο πίνακα $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ συμβολίζουμε με $\mathrm{tr}(A)$ το άθροισμα των στοιχείων της κύριας διαγωνίου (ίχνος) του A.

(α) Για $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$ και $\lambda \in \mathbb{F}$, δείξτε ότι:

- $\mathrm{tr}(\lambda A) = \lambda \mathrm{tr}(A)$,
- $\mathrm{tr}(A + B) = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B)$,
- $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.

(β) Αν για τη συνάρτηση $\varphi : \mathbb{F}^{n\times n} \to \mathbb{F}$ ισχύουν

- $\varphi(\lambda A) = \lambda\varphi(A)$,
- $\varphi(A + B) = \varphi(A) + \varphi(B)$,
- $\varphi(AB) = \varphi(BA)$

για όλους τους πίνακες $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$ και κάθε $\lambda \in \mathbb{F}$, δείξτε ότι υπάρχει $c \in \mathbb{F}$ τέτοιο ώστε $\varphi(A) = c\,\mathrm{tr}(A)$ για κάθε $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$.

12. Δίνεται πίνακας $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$.

(α) Υπολογίστε το ίχνος $\mathrm{tr}(A^tA)$ ως συνάρτηση των στοιχείων του A.
(β) Συνάγετε ότι αν $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, τότε $\mathrm{tr}(A^tA) \geq 0$ και η ισότητα ισχύει μόνο για το μηδενικό πίνακα.
(γ) Βρείτε όλα τα ζεύγη πινάκων $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ που επαληθεύουν την ισότητα $\mathrm{tr}(AA^t + BB^t) = \mathrm{tr}(A^tB + B^tA)$.

13. Δείξτε ότι:

(α) Κάθε πίνακας $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ μπορεί να γραφεί στη μορφή $A = B^2 + C^2$ με $B, C \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

(β) Υπάρχει πίνακας $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ ο οποίος δεν μπορεί να γραφεί στη μορφή $A = B^2 + C^2$ για πίνακες $B, C \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ με $BC = CB$.

14. Έστω πίνακες $A, B, P \in \mathbb{F}^{n\times n}$.

(α) Αν ο P είναι αντιστρέψιμος και $AP = O$, δείξτε ότι $A = O$.

(β) Αν ο P είναι αντιστρέψιμος και $PB = O$, δείξτε ότι $B = O$.

(γ) Αν $AB = BA$, $A^2 = B^2$ και ο $A + B$ είναι αντιστρέψιμος, δείξτε ότι $A = B$.

15. Δίνονται οι πίνακες $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ και $B = A - I$.

(α) Υπολογίστε τον πίνακα B και δείξτε ότι $B^2 = O$.

(β) Συνάγετε ότι ο A είναι αντιστρέψιμος και υπολογίστε τον αντίστροφό του.

(γ) Υπολογίστε τον πίνακα A^n για $n \in \mathbb{N}$.

16. Υπάρχει θετικός ακέραιος n και πίνακες $A, B, C \in \mathbb{C}^{n\times n}$ τέτοιοι ώστε

(α) $AB - BA = I$;

(β) $AB - BA = A$ και $AC = I$;

17. Έστω πίνακας $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$. Βρείτε όλους τους πίνακες $B \in \mathbb{F}^{n\times n}$ για τους οποίους ισχύει $AB = BA$ στις εξής περιπτώσεις:

(α) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, (β) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

(γ) ο A είναι διαγώνιος και τα στοιχεία του στην κύρια διαγώνιο είναι διαφορετικά ανά δύο,

(δ) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$, (ε) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$.

18. Έστω πίνακας $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$.

(α) Αν ισχύει $AB = BA$ για κάθε διαγώνιο πίνακα $B \in \mathbb{F}^{n\times n}$, δείξτε ότι ο A είναι διαγώνιος πίνακας.
(β) Αν ισχύει $AB = BA$ για κάθε $B \in \mathbb{F}^{n\times n}$, δείξτε ότι $A = \lambda I$ για κάποιο $\lambda \in \mathbb{F}$.
(γ) Αν ισχύει $AB = BA$ για κάθε πίνακα $B \in \mathbb{F}^{n\times n}$ τα στοιχεία στην κύρια διαγώνιο του οποίου είναι ίσα με μηδέν, δείξτε ότι $A = \lambda I$ για κάποιο $\lambda \in \mathbb{F}$.
(δ) Αν ισχύει $AP = PA$ για κάθε αντιστρέψιμο πίνακα $P \in \mathbb{F}^{n\times n}$, δείξτε ότι $A = \lambda I$ για κάποιο $\lambda \in \mathbb{F}$.
(ε) Για ποιους πίνακες A ισχύει $AB = BA$ για κάθε άνω τριγωνικό πίνακα $B \in \mathbb{F}^{n\times n}$, τα στοιχεία στην κύρια διαγώνιο του οποίου είναι ίσα με μηδέν;

19. Ένας πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ θα λέγεται καλός αν κάθε πίνακας $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$ γράφεται με μοναδικό τρόπο στη μορφή $X = Y + Z$, όπου $Y, Z \in \mathbb{C}^{n\times n}$ είναι πίνακες με $AY = YA$ και $AZ = -ZA$. Δείξτε ότι ο A είναι καλός αν και μόνο αν $A^2 = \lambda I_n$ για κάποιο μη μηδενικό $\lambda \in \mathbb{C}$.

20. Δίνεται πίνακας $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$.

(α) Αν ο A είναι συμμετρικός, δείξτε ότι και ο $P^t AP$ είναι συμμετρικός για κάθε $P \in \mathbb{F}^{n\times n}$.
(β) Αν ο $P^t AP$ είναι συμμετρικός για κάποιον αντιστρέψιμο πίνακα $P \in \mathbb{F}^{n\times n}$, δείξτε ότι ο A είναι συμμετρικός πίνακας.

21. Για ποιους θετικούς ακεραίους n ισχύει καθένα από τα εξής;

(α) Αν ο πίνακας $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ είναι συμμετρικός, τότε και ο A^2 είναι συμμετρικός.
(β) Αν $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ και ο πίνακας A^2 είναι συμμετρικός, τότε και ο A είναι συμμετρικός.
(γ) Αν ο πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ είναι αντιστρέψιμος και ο A^2 είναι συμμετρικός, τότε ο A είναι συμμετρικός.
(δ) Αν $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ και ο πίνακας $(A + B)^2$ είναι συμμετρικός για κάθε συμμετρικό πίνακα $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, τότε ο A είναι συμμετρικός.

22. Ένας τετραγωνικός πίνακας A λέγεται *μηδενοδύναμος* αν $A^m = O$ για κάποιο θετικό ακέραιο m.

(α) Δείξτε ότι δεν υπάρχουν αντιστρέψιμοι μηδενοδύναμοι πίνακες.
(β) Δείξτε ότι ο πίνακας $I + A$ είναι αντιστρέψιμος για κάθε μηδενοδύναμο πίνακα A.
(γ) Δείξτε ότι αν ο πίνακας A είναι άνω τριγωνικός και όλα τα στοιχεία πάνω στην κύρια διαγώνιο του A είναι ίσα με μηδέν, τότε ο A είναι μηδενοδύναμος.
(δ) Δείξτε ότι αν οι A, B είναι μηδενοδύναμοι πίνακες και $BA = \lambda AB$ για κάποιο $\lambda \in \mathbb{F}$, τότε ο $A + B$ είναι επίσης μηδενοδύναμος πίνακας.
(ε) Δώστε παράδειγμα 2×2 μηδενοδύναμων πινάκων A, B τέτοιων ώστε ο $A + B$ να είναι αντιστρέψιμος πίνακας.
(στ) Βρείτε όλους τους 2×2 μηδενοδύναμους πίνακες. Συνάγετε ότι αν οι A, B και $A + B$ είναι 2×2 μηδενοδύναμοι πίνακες, τότε $AB = BA = O$.
(ζ) Αληθεύει ότι αν οι A, B και $A + B$ είναι 3×3 μηδενοδύναμοι πίνακες, τότε $AB = O$ ή $BA = \lambda AB$ για κάποιο $\lambda \in \mathbb{F}$;

23. Βρείτε όλους τους αντιστρέψιμους πίνακες $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ με στοιχεία μη αρνητικούς αριθμούς για τους οποίους τα στοιχεία του αντίστροφου πίνακα A^{-1} είναι επίσης μη αρνητικοί αριθμοί

(α) για $n = 2$,
(β) για τυχαίο θετικό ακέραιο n.

24. Έστω $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ και $B \in \mathbb{F}^{n\times m}$. Δείξτε ότι ο πίνακας $I_m - AB$ είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν ο πίνακας $I_n - BA$ είναι αντιστρέψιμος.

25. Συμβολίζουμε με $\mathcal{K}_n(\mathbb{F})$ το σύνολο όλων των πινάκων της μορφής $BC - CB$, όπου $B, C \in \mathbb{F}^{n\times n}$.

(α) Δείξτε ότι $\mathrm{tr}(A) = 0$ για κάθε πίνακα $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ που μπορεί να γραφεί ως άθροισμα πεπερασμένου πλήθους στοιχείων του $\mathcal{K}_n(\mathbb{F})$.
(β) Δείξτε ότι οι πίνακες $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ και $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ανήκουν στο $\mathcal{K}_2(\mathbb{F})$.
(γ) Δείξτε ότι κάθε πίνακας $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ ίχνους μηδέν μπορεί να γραφεί ως άθροισμα πεπερασμένου πλήθους στοιχείων του $\mathcal{K}_n(\mathbb{F})$.

Στοιχειώδεις Μετασχηματισμοί και Γραμμικά Συστήματα

26. Υπολογίστε την ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του πίνακα

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ n+1 & n+2 & \cdots & 2n \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ n^2-n+1 & n^2-n+2 & \cdots & n^2 \end{pmatrix}$$

για $n \geq 2$.

27. Να λύσετε τα συστήματα των γραμμικών εξισώσεων:

$$(\alpha) \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + x_3 & = & 1 \\ x_2 + x_3 + x_4 & = & 1 \\ x_3 + x_4 + x_5 & = & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{98} + x_{99} + x_{100} & = & 1 \end{array} \right. \qquad (\beta) \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + x_3 + x_5 & = & 1 \\ x_2 + x_4 + x_6 & = & 1 \\ x_3 + x_5 + x_7 & = & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{96} + x_{98} + x_{100} & = & 1 \end{array} \right.$$

πάνω σε τυχαίο σώμα $\mathbb{F}$.

28. Για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, να λύσετε το σύστημα των γραμμικών εξισώσεων:

$$(\alpha) \left\{ \begin{array}{rcl} \lambda x_1 + x_2 & = & 1 \\ x_1 + \lambda x_2 & = & \lambda \end{array} \right. \qquad (\beta) \left\{ \begin{array}{rcl} \lambda x_1 + x_2 + x_3 & = & 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 & = & \lambda \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 & = & \lambda^2 \end{array} \right.$$

(γ)

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \lambda x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} + x_n & = & 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + \cdots + x_{n-1} + x_n & = & \lambda \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1 + x_2 + \cdots + \lambda x_{n-1} + x_n & = & \lambda^{n-2} \\ x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} + \lambda x_n & = & \lambda^{n-1} \end{array} \right.$$

για τυχαίο ακέραιο $n \geq 3$.

29. Δίνονται θετικοί ακέραιοι m, p και μη αντιστρέψιμος πίνακας $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$.

(α) Δείξτε ότι υπάρχει μη μηδενικός πίνακας $B \in \mathbb{F}^{n\times p}$, τέτοιος ώστε $AB = O$.

(β) Δείξτε ότι υπάρχει μη μηδενικός πίνακας $C \in \mathbb{F}^{m\times n}$, τέτοιος ώστε $CA = O$.

30. Δίνεται πίνακας $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ με $m < n$.

(α) Δείξτε ότι το ομογενές γραμμικό σύστημα $Ax = 0$ έχει μη τετριμμένη λύση.
(β) Αν το σώμα $\mathbb{F}$ είναι άπειρο, δείξτε ότι το σύστημα $Ax = 0$ έχει άπειρες λύσεις.

31. Έστω πίνακες $A \in \mathbb{F}^{n\times m}$ και $B \in \mathbb{F}^{m\times n}$ με $AB = I_n$.

(α) Δείξτε ότι το ομογενές γραμμικό σύστημα $Bx = 0$ δεν έχει μη τετριμμένη λύση.
(β) Συνάγετε ότι ισχύει $n \leq m$.
(γ) Αν $n = m$, δείξτε ότι ισχύει επίσης $BA = I_n$.

32. Δίνεται πίνακας $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$. Δείξτε ότι οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες:

(i) Το γραμμικό σύστημα $Ax = b$ έχει το πολύ μία λύση για κάθε $b \in \mathbb{F}^m$.
(ii) Το ομογενές γραμμικό σύστημα $Ax = 0$ έχει μόνο την τετριμμένη λύση.

33. Δίνεται πίνακας $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$. Δείξτε ότι οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες:

(i) Ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος.
(ii) Το γραμμικό σύστημα $Ax = b$ έχει μοναδική λύση για κάθε $b \in \mathbb{F}^n$.
(iii) Το γραμμικό σύστημα $Ax = b$ έχει μοναδική λύση για κάποιο $b \in \mathbb{F}^n$.
(iv) Το γραμμικό σύστημα $Ax = b$ έχει λύση για κάθε $b \in \mathbb{F}^n$.

34. Δίνεται πίνακας $A \in \mathbb{Q}^{m\times n}$ και $b \in \mathbb{Q}^m$. Δείξτε ότι αν το γραμμικό σύστημα $Ax = b$ έχει μιγαδική λύση $x \in \mathbb{C}^n$, τότε το σύστημα αυτό έχει και ρητή λύση $x \in \mathbb{Q}^n$.

35. Δίνονται σύνολο S με n στοιχεία και μη κενά υποσύνολα $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$ του S. Χρησιμοποιώντας την Άσκηση 30, δείξτε ότι υπάρχουν μη κενά, ξένα μεταξύ τους σύνολα δεικτών $I, J \subseteq \{1, 2, \ldots, n+1\}$ τέτοια ώστε $\cup_{i\in I} A_i = \cup_{j\in J} A_j$.

36. Υπολογίστε τον αντίστροφο των πινάκων:

(α) $$A_n = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & \lambda^2 & \cdots & \lambda^{n-1} \\ 0 & 1 & \lambda & \cdots & \lambda^{n-2} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \lambda^{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix},\ \text{για } \lambda \in \mathbb{F}.$$

(β) $B_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, για $n \geq 2$.

37. Δίνεται ο πίνακας $A_n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 3 & 3 & 3 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & n & \cdots & n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

(α) Υπολογίστε τον αντίστροφο του A_n για $n = 2, 3, 4, 5$.
(β) Υπολογίστε τον αντίστροφο του A_n για τυχαίο θετικό ακέραιο n.

38. Δίνεται ο πίνακας $A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & -1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

(α) Για ποιες τιμές του n είναι ο πίνακας A_n αντιστρέψιμος;
(β) Υπολογίστε τον αντίστροφο του A_n, όταν αυτός υπάρχει.

39. Έστω πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$.

(α) Αν κάθε στοιχείο της κύριας διαγωνίου του A είναι ίσο με n και καθένα από τα υπόλοιπα στοιχεία του A έχει μέτρο μικρότερο ή ίσο του 1, δείξτε ότι ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος.
(β) Ισχύει το ίδιο αν υποθέσουμε ότι κάθε στοιχείο της διαγωνίου του A είναι ίσο με $n - 1$;

40. Έστω πίνακες $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$. Αν υπάρχουν ακέραιοι $m \geq 1$ και $p \geq 0$ τέτοιοι ώστε $AB^m = (I-B)^p$, δείξτε ότι ο πίνακας B είναι αντιστρέψιμος.

41. Έστω πίνακες $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ με $AB = BA$ και έστω $P = A + B + I$.

(α) Αν $Px = 0$ για κάποιο $x \in \mathbb{C}^n$, δείξτε ότι $(A + I)^k x = (-B)^k x$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$.
(β) Αν $A^m = B^{m+1} = I$ για κάποιο θετικό ακέραιο m, δείξτε ότι ο πίνακας P είναι αντιστρέψιμος.
(γ) Αληθεύει το (β) χωρίς την υπόθεση ότι $AB = BA$;

42. Έστω πίνακες $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$.

(α) Αν $AB = A + B$, δείξτε ότι $AB = BA$.
(β) Αν $P \in \mathbb{F}^{n\times n}$ είναι αντιστρέψιμος πίνακας και ισχύει $A = PB(A + P)$, δείξτε ότι $ABP = PBA$.
(γ) Αληθεύει το (β) χωρίς την υπόθεση ότι ο P είναι αντιστρέψιμος;

Ορίζουσες

43. Ποιο είναι το πρόσημο του όρου $a_{13}a_{25}a_{31}a_{46}a_{52}a_{64}$ στο ανάπτυγμα της 6×6 ορίζουσας $\det(a_{ij})$;

44. Δείξτε ότι

(α) $$\det\begin{pmatrix} 1 & a & a^2+bc \\ 1 & b & b^2+ac \\ 1 & c & c^2+ab \end{pmatrix} = 2\det\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix},$$

(β) $$\det\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3+bcd \\ 1 & b & b^2 & b^3+acd \\ 1 & c & c^2 & c^3+abd \\ 1 & d & d^2 & d^3+abc \end{pmatrix} = 0$$

για $a, b, c, d \in \mathbb{F}$.

45. Υπολογίστε τις $n \times n$ ορίζουσες:

(α) $$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & -1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

(β) $$\det\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n-1 & 1-n \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

46. Θεωρούμε την $n \times n$ ορίζουσα

$$c_n = \det\begin{pmatrix} \alpha+\beta & \alpha & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \beta & \alpha+\beta & \alpha & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \beta & \alpha+\beta & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \beta & \alpha+\beta & \alpha \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \beta & \alpha+\beta \end{pmatrix}$$

για $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$.

(α) Δείξτε ότι $c_n = (\alpha+\beta)c_{n-1} - \alpha\beta\, c_{n-2}$ για $n \geq 2$, όπου $c_0 = 1$ κατά σύμβαση.

(β) Συνάγετε έναν τύπο για το c_n της μορφής $c_n = p_n(\alpha, \beta)$, όπου $p_n(x, y) \in \mathbb{Z}[x, y]$ είναι πολυώνυμο με ακέραιους συντελεστές.

47. Έστω ο $n \times n$ πίνακας A_n της Άσκησης 37.

(α) Υπολογίστε την ορίζουσα του A_n για $n = 1, 2, 3, 4, 5$.

(β) Υπολογίστε την ορίζουσα του A_n για τυχαίο θετικό ακέραιο n.

(γ) Υπολογίστε τον προσαρτημένο πίνακα του A_n για τυχαίο θετικό ακέραιο n.

(δ) Να λύσετε το σύστημα γραμμικών εξισώσεων $A_n \cdot x = b$, όπου b είναι η στήλη μήκους n όλα τα στοιχεία της οποίας είναι ίσα με 1.

48. Δείξτε ότι η ορίζουσα του προσαρτημένου πίνακα ενός πίνακα $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ είναι ίση με $(\det(A))^{n-1}$.

49. Έστω αντιστρέψιμος πίνακας $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$. Δείξτε ότι το άθροισμα των στοιχείων του αντίστροφου πίνακα A^{-1} είναι ίσο με $1/\det(A)$ επί το άθροισμα των οριζουσών των n πινάκων που προκύπτουν αντικαθιστώντας μια από τις n γραμμές του A με τη γραμμή $(1\ 1\ \cdots\ 1)$.

50. Δίνεται θετικός ακέραιος m.

(α) Αν για δύο $n \times n$ πίνακες $A = (a_{ij})$ και $B = (b_{ij})$ με στοιχεία ακέραιους αριθμούς ισχύει $a_{ij} \equiv b_{ij} \pmod{m}$ για $1 \leq i, j \leq n$, δείξτε ότι $\det(A) \equiv \det(B) \pmod{m}$.

(β) Δείξτε ότι ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3331 & 6661 & 9991 \\ 9332 & 2662 & 5992 & 8002 \\ 8663 & 2993 & 4333 & 7003 \\ 7994 & 1004 & 4334 & 6664 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$$

είναι αντιστρέψιμος.

51. Για $n \times n$ πίνακα $A = (a_{i,j})$ με στοιχεία ακέραιους αριθμούς, συμβολίζουμε με $f(A)$ το πλήθος των ζευγών $(i, j) \in \{1, 2, \ldots, n\} \times \{1, 2, \ldots, n\}$ για τα οποία το $a_{i,j}$ είναι περιττός αριθμός. Δοθέντος του n, βρείτε τη μέγιστη τιμή του $f(A)$ αν $\det(A) = \pm 1$.

52. Έστω ο $n \times n$ πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{pmatrix},$$

όπου $a_1, a_2, \ldots, a_n$ είναι στοιχεία ενός σώματος $\mathbb{F}$.

(α) Δείξτε ότι $\det(A) = \prod_{1 \le i < j \le n} (a_j - a_i)$.

(β) Αν τα $a_1, a_2, \ldots, a_n$ είναι διαφορετικά ανά δύο, συνάγετε ότι ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος και δείξτε ότι το άθροισμα των στοιχείων του A^{-1} είναι ίσο με 1.

(γ) Δείξτε ότι

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1^{n-2} & a_2^{n-2} & \cdots & a_n^{n-2} \\ a_1^n & a_2^n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix} = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \prod_{1 \le i < j \le n} (a_j - a_i).$$

53. Υπολογίστε την $n \times n$ ορίζουσα

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 + y_1 & x_2 + y_1 & \cdots & x_n + y_1 \\ (x_1 + y_1)(x_1 + y_2) & (x_2 + y_1)(x_2 + y_2) & \cdots & (x_n + y_1)(x_n + y_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (x_1 + y_1) \cdots (x_1 + y_{n-1}) & \cdots & \cdots & (x_n + y_1) \cdots (x_n + y_{n-1}) \end{pmatrix}$$

για πραγματικούς αριθμούς $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_{n-1}$.

54. Έστω $f(t)$ η ορίζουσα του $n \times n$ πίνακα

$$\begin{pmatrix} c_1 - t & a - t & a - t & \cdots & a - t \\ b - t & c_2 - t & a - t & \cdots & a - t \\ b - t & b - t & c_3 - t & \cdots & a - t \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b - t & b - t & b - t & \cdots & c_n - t \end{pmatrix},$$

όπου $a, b, c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$ και έστω το πολυώνυμο $\varphi(t) = (c_1 - t)(c_2 - t) \cdots (c_n - t)$.

(α) Δείξτε ότι $f(a) = \varphi(a)$ και ότι $f(b) = \varphi(b)$.

(β) Αν $a \neq b$, δείξτε ότι $f(0) = \frac{b\varphi(a)-a\varphi(b)}{b-a}$.

55. Να υπολογίσετε την ορίζουσα του $(k+1)\times(k+1)$ πίνακα

$$A(n,k) = \begin{pmatrix} \binom{n}{0} & \binom{n}{1} & \cdots & \binom{n}{k} \\ \binom{n+1}{0} & \binom{n+1}{1} & \cdots & \binom{n+1}{k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \binom{n+k}{0} & \binom{n+k}{1} & \cdots & \binom{n+k}{k} \end{pmatrix},$$

όπου $\binom{m}{r} = \frac{m!}{r!(m-r)!}$. *Υπόδειξη*: $\binom{m}{r} = \binom{m-1}{r} + \binom{m-1}{r-1}$.

56. Έστω $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$ και $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n, x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{F}$.

(α) Δείξτε ότι η ορίζουσα του πίνακα $A + B$ είναι ίση με το άθροισμα των οριζουσών των 2^n πινάκων που προκύπτουν από τον A αντικαθιστώντας κάποιες από τις στήλες του A (πιθανώς καμιά ή και όλες) με τις αντίστοιχες στήλες του B.

(β) Υπολογίστε την $n \times n$ ορίζουσα

$$\det\begin{pmatrix} a_1b_1 + x_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 + x_2 & \cdots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n + x_n \end{pmatrix}.$$

(γ) Υπολογίστε το όριο

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^{\lfloor n/2\rfloor}}{n!} \det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & -1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 4 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1+(-1)^{n-1}n \end{pmatrix}.$$

57. Δίνεται ο $n \times n$ πίνακας

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \cdots & \frac{1}{2n-1} \end{pmatrix}.$$

(α) Δείξτε ότι ο A_n είναι αντιστρέψιμος για κάθε n.

Συμβολίζουμε με $c_{ij}(n)$ το (i,j)-στοιχείο του αντίστροφου του A_n.

(β) Δείξτε ότι $(-1)^{i+j}c_{ij}(n) > 0$ για $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ και ότι $c_{11} = n^2$ και $c_{nn}(n) = (2n-1)\binom{2n-2}{n-1}^2$ για κάθε n.

(γ) Υπολογίστε την ορίζουσα του A_n.
(δ) Δείξτε ότι $\sum_{i,j=1}^{n} c_{ij}(n) = n^2$ για κάθε n.

58. Έστω η $n \times n$ ορίζουσα

$$d_n = \det \begin{pmatrix} \frac{1}{1!} & \frac{1}{2!} & \cdots & \frac{1}{n!} \\ \frac{1}{2!} & \frac{1}{3!} & \cdots & \frac{1}{(n+1)!} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n!} & \frac{1}{(n+1)!} & \cdots & \frac{1}{(2n-1)!} \end{pmatrix}.$$

(α) Υπολογίστε τη d_n για $n = 2$ και $n = 3$.
(β) Δείξτε ότι

$$d_n = \frac{1!2!\cdots(n-1)!}{n!(n+1)!\cdots(2n-1)!} \det \begin{pmatrix} \binom{n}{1} & \binom{n}{2} & \cdots & \binom{n}{n} \\ \binom{n+1}{2} & \binom{n+1}{3} & \cdots & \binom{n+1}{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \binom{2n-1}{n} & \binom{2n-1}{n+1} & \cdots & \binom{2n-1}{2n-1} \end{pmatrix}.$$

(γ) Υπολογίστε τη d_n για τυχαίο θετικό ακέραιο n.

59. Έστω ακέραιος $n \geq 2$ και $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$.

(α) Δείξτε ότι

$$\det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & -1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \end{pmatrix} = a_0 + a_1 + 2a_2 + 2^2 a_3 + \cdots + 2^{n-2} a_{n-1}.$$

(β) Υπάρχει 12×12 πίνακας A τα στοιχεία του οποίου ανήκουν στο σύνολο $\{-1, 0, 1\}$, τέτοιος ώστε $\det(A) = 2010$;

60. Έστω θετικοί ακέραιοι n, m και $x_0, x_1, \ldots, x_{m-1} \in \mathbb{F}$.

(α) Αν $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ και $B = (b_{ij}) \in \mathbb{F}^{m\times m}$, δείξτε ότι

$$\det \begin{pmatrix} b_{11}A & b_{12}A & \cdots & b_{1m}A \\ b_{21}A & b_{22}A & \cdots & b_{2m}A \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{m1}A & b_{m2}A & \cdots & b_{mm}A \end{pmatrix} = (\det(A))^m (\det(B))^n.$$

(β) Έστω ο $m^2 \times m^2$ πίνακας $C_m = (c_{ij})$, όπου $0 \leq i, j \leq m^2 - 1$, με στοιχεία $c_{ij} = x_{r_0}^{s_0} x_{r_1}^{s_1}$, όπου $i = r_0 + mr_1$, $j = s_0 + ms_1$ και

$r_0, r_1, s_0, s_1 \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$. Δείξτε ότι

$$\det(C_m) \;=\; \left(\prod_{i>j}(x_i - x_j)\right)^{2m}.$$

61. Δείξτε ότι

$$\det\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_1 \end{pmatrix} \;=\; (-1)^{n-1}\prod_{j=0}^{n-1}\left(\sum_{k=1}^{n}\zeta^{jk}a_k\right),$$

όπου $\zeta = e^{2\pi i/n}$. Συνάγετε ότι

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ n-1 & n & 1 & \cdots & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \;=\; (-1)^{n-1}\,\frac{(n+1)\,n^{n-1}}{2}.$$

62. Υπάρχει πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ τέτοιος ώστε $A^2 = -I$;

(α) Απαντήστε το ερώτημα αυτό

- για $n \in \{2, 3\}$,
- για τυχαίο θετικό ακέραιο n.

(β) Βρείτε όλους τους θετικούς ακεραίους n για τους οποίους υπάρχουν αντιστρέψιμοι πίνακες $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ τέτοιοι ώστε $A^2 + B^2 = O$.

63. Για ποιες ακέραιες τιμές του a υπάρχει πίνακας $X \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$ τέτοιος ώστε

$$X^2 \;=\; \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a+1 & 0 \\ 0 & 0 & a+1 \end{pmatrix}?$$

64. Έστω πίνακες $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

(α) Αν $AB = BA$, δείξτε ότι $\det(A^2 + B^2) \geq 0$.
(β) Ισχύει το συμπέρασμα του (α) χωρίς την υπόθεση $AB = BA$;

65. Έστω συμμετρικοί, αντιστρέψιμοι πίνακες $A, B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Δείξτε ότι ο $A^2 + B^2$ είναι επίσης αντιστρέψιμος πίνακας. Ισχύει το ίδιο για $n \times n$ πίνακες;

66. Έστω πίνακας $A \in \mathbb{Z}^{2\times 2}$ για τον οποίο η ορίζουσα $\det(A^2 + B^2)$ είναι ίση με το τετράγωνο κάποιου ακέραιου αριθμού για κάθε $B \in \mathbb{Z}^{2\times 2}$ με $AB = BA$. Δείξτε ότι $(\mathrm{tr}(A))^2 = 4\det(A)$.

67. Έστω πίνακες $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{F}^{n\times m}$ και $D \in \mathbb{F}^{m\times m}$.

(α) Δείξτε ότι

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ O & D \end{pmatrix} = \det(A)\det(D).$$

(β) Έστω ότι $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (δηλαδή $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ και $n = m$). Δείξτε ότι

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} = \det(A - \mathrm{i}B)\det(A + \mathrm{i}B)$$

και συνάγετε ότι

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} \geq 0.$$

68. Έστω πίνακες $A, B, C, D \in \mathbb{F}^{n\times n}$.

(α) Δείξτε ότι αν ο A είναι αντιστρέψιμος και $AC = CA$, τότε

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - CB).$$

(β) Ισχύει το συμπέρασμα του (α) χωρίς την υπόθεση $AC = CA$;

69. Έστω πίνακες $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ και $B \in \mathbb{F}^{n\times m}$.

(α) Αν $m > n$, δείξτε ότι $\det(AB) = 0$.
(β) Αν $m \leq n$, δείξτε ότι

$$\det(AB) = \sum_S \det(A_S)\det(B_S),$$

όπου στο άθροισμα του δεξιού μέλους το $S = \{j_1 < j_2 < \cdots < j_m\}$ διατρέχει όλα τα υποσύνολα του $\{1, 2, \ldots, n\}$ με m στοιχεία, A_S είναι ο $m\times m$ πίνακας με στήλες τις $j_1, j_2, \ldots, j_m$ στήλες του A και B_S είναι ο $m \times m$ πίνακας με γραμμές τις $j_1, j_2, \ldots, j_m$ γραμμές του B.
(γ) Για τυχαίο πίνακα $Q \in \mathbb{R}^{n\times m}$, δείξτε ότι $\det(Q^t Q) \geq 0$.

70. Έστω $n \times n$ πίνακας A, καθένα από τα στοιχεία του οποίου είναι ίσο με 1 ή -1.

(α) Δείξτε ότι η ορίζουσα του A είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του 2^{n-1}.
(β) Για δοσμένο n, υπολογίστε την ελάχιστη θετική τιμή που μπορεί να λάβει η ορίζουσα του A.

71. Βρείτε όλους τους θετικούς ακεραίους n που έχουν την εξής ιδιότητα: η ορίζουσα κάθε συμμετρικού $n \times n$ πίνακα με στοιχεία ακέραιους αριθμούς και μηδενικά πάνω στην κύρια διαγώνιο είναι άρτιος αριθμός.

72. Δίνεται σώμα $\mathbb{F}$.

(α) Αν το $\mathbb{F}$ έχει τουλάχιστον τρία στοιχεία, δείξτε ότι κάθε πίνακας $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ μπορεί να γραφεί ως άθροισμα δύο αντιστρέψιμων πινάκων, ένας από τους οποίους είναι άνω τριγωνικός και ο άλλος κάτω τριγωνικός.

(β) Αν $n \geq 2$, δείξτε ότι κάθε πίνακας $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ μπορεί να γραφεί ως άθροισμα δύο αντιστρέψιμων πινάκων.

73. Δίνεται θετικός ακέραιος n και τυχαίοι πραγματικοί αριθμοί a_{ij} για $1 \leq i, j \leq n$ με $i \neq j$. Δείξτε ότι υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί $a_{ii} \in \{0, 1\}$ για $1 \leq i \leq n$, τέτοιοι ώστε ο πίνακας $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ να είναι αντιστρέψιμος.

74. Δείξτε ότι:

(α) Αν $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1} \in \mathbb{F}^{n\times n}$ είναι τυχαίοι πίνακες, τότε υπάρχουν $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n+1} \in \mathbb{F}$, όχι όλα μηδέν, τέτοια ώστε $\det(\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \cdots + \lambda_{n+1} A_{n+1}) = 0$.

(β) Υπάρχουν πίνακες $A_1, A_2 \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ με την εξής ιδιότητα: αν λ_1, λ_2 είναι τυχαίοι πραγματικοί αριθμοί, όχι και οι δύο μηδέν, τότε $\det(\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2) \neq 0$.

(γ) Υπάρχουν πίνακες $A_1, A_2, A_3, A_4 \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ με την εξής ιδιότητα: αν $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ είναι τυχαίοι πραγματικοί αριθμοί, όχι όλοι μηδέν, τότε $\det(\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \lambda_3 A_3 + \lambda_4 A_4) \neq 0$.

Τάξη Πίνακα

Συμβολίζουμε με rank(A) την τάξη ενός πίνακα $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$, δηλαδή το μεγαλύτερο φυσικό αριθμό k για τον οποίο υπάρχει μη μηδενική $k \times k$ υποορίζουσα του A και υπενθυμίζουμε ότι η τάξη ενός πίνακα δε μεταβάλλεται όταν εκτελούμε στοιχειώδεις μετασχηματισμούς στις γραμμές (ή στις στήλες) του πίνακα αυτού.

75. Υπολογίστε την τάξη του πίνακα της Άσκησης 26 για κάθε θετικό ακέραιο n.

76. Δίνεται θετικός ακέραιος n. Ποια είναι η μέγιστη δυνατή τάξη ενός μηδενοδύναμου πίνακα $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ (δηλαδή $n \times n$ πίνακα με $A^m = O$ για κάποιο θετικό ακέραιο m);

77. Για τυχαίους πίνακες $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ και $B \in \mathbb{F}^{n\times p}$ δείξτε ότι:

(α) $\mathrm{rank}(AB) \le \mathrm{rank}(A)$.
(β) $\mathrm{rank}(AB) \le \mathrm{rank}(B)$.

78. Δίνεται πίνακας $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$. Δείξτε ότι οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες:

(α) $\mathrm{rank}(A) = m$.
(β) Υπάρχει μία $m \times m$ υποορίζουσα του A η οποία είναι διάφορη του μηδενός.
(γ) Το γραμμικό σύστημα $Ax = b$ είναι συμβιβαστό για κάθε $b \in \mathbb{F}^{m\times 1}$.
(δ) Υπάρχει πίνακας $B \in \mathbb{F}^{n\times m}$ τέτοιος ώστε $AB = I_m$.

79. Δίνεται πίνακας $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$. Δείξτε ότι οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες:

(α) $\mathrm{rank}(A) = n$.
(β) Υπάρχει μία $n \times n$ υποορίζουσα του A η οποία είναι διάφορη του μηδενός.
(γ) Το γραμμικό σύστημα $Ax = b$ έχει το πολύ μία λύση για κάθε $b \in \mathbb{F}^{m\times 1}$.
(δ) Το ομογενές γραμμικό σύστημα $Ax = 0$ έχει μόνο την τετριμμένη λύση $x = 0$.
(ε) Υπάρχει πίνακας $C \in \mathbb{F}^{n\times m}$ τέτοιος ώστε $CA = I_n$.

80. Για τυχαίο πίνακα $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ δείξτε ότι:

(α) $\mathrm{rank}(PAQ) \le \mathrm{rank}(A)$ για $P \in \mathbb{F}^{m\times m}$ και $Q \in \mathbb{F}^{n\times n}$.
(β) $\mathrm{rank}(PA) = \mathrm{rank}(A)$ για κάθε αντιστρέψιμο πίνακα $P \in \mathbb{F}^{m\times m}$.
(γ) $\mathrm{rank}(AQ) = \mathrm{rank}(A)$ για κάθε αντιστρέψιμο πίνακα $Q \in \mathbb{F}^{n\times n}$.
(δ) $\mathrm{rank}(PAQ) = \mathrm{rank}(A)$ για όλους τους αντιστρέψιμους $P \in \mathbb{F}^{m\times m}$ και $Q \in \mathbb{F}^{n\times n}$.

81. Βρείτε όλους τους πίνακες $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ που έχουν την ιδιότητα $\mathrm{rank}(AX) = \mathrm{rank}(XA)$ για κάθε πίνακα $X \in \mathbb{F}^{n\times n}$.

82. Δίνεται ο πίνακας $J_r = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{m\times n}$, όπου $0 \le r \le \min\{m, n\}$.

(α) Δείξτε ότι για κάθε πίνακα $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ τάξης r υπάρχουν αντιστρέψιμοι πίνακες $P \in \mathbb{F}^{m\times m}$ και $Q \in \mathbb{F}^{n\times n}$, τέτοιοι ώστε $PAQ = J_r$.
(β) Αν $n \ge 2$, δείξτε ότι κάθε πίνακας $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ μπορεί να γραφεί ως άθροισμα δύο αντιστρέψιμων πινάκων.

83. Δείξτε ότι $\mathrm{rank}(A + B) \le \mathrm{rank}(A) + \mathrm{rank}(B)$ για τυχαίους πίνακες $A, B \in \mathbb{F}^{m\times n}$.

84. Δείξτε ότι

$$\mathrm{rank}(I - A_1A_2\cdots A_m) \;\le\; \sum_{i=1}^{m} \mathrm{rank}(I - A_i)$$

για τυχαίους πίνακες $A_1, A_2, \ldots, A_m \in \mathbb{F}^{n\times n}$.

85. Δίνεται ακέραιος $n \ge 2$. Ποια είναι η ελάχιστη και ποια η μέγιστη τιμή της τάξης ενός $n \times n$ πίνακα, τα στοιχεία του οποίου είναι ακριβώς οι ακέραιοι $1, 2, \ldots, n^2$;

86. Έστω θετικός ακέραιος n και πίνακας $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ με

$$|a_{ij}| \;=\; \begin{cases} 0, & \text{αν } i = j, \\ 1, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

(α) Αν ο n είναι άρτιος, δείξτε ότι ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος.
(β) Έστω ότι ο n είναι περιττός. Ποιες είναι οι δυνατές τιμές της τάξης του A;

87. Έστω A ένας $n\times n$ πίνακας με τις εξής ιδιότητες: Κάθε στοιχείο της κύριας διαγωνίου του A είναι ίσο με μηδέν και καθένα από τα υπόλοιπα στοιχεία του A είναι ίσο με 1 ή με 2010. Δείξτε ότι $\mathrm{rank}(A) \ge n - 1$.

88. Δίνεται πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ για τον οποίο ισχύει $A^t + A = J_n - I_n$, όπου J_n είναι ο $n \times n$ πίνακας κάθε στοιχείο του οποίου είναι ίσο με 1.

(α) Δείξτε ότι $\mathrm{rank}(A) \ge n - 1$.
(β) Δώστε παράδειγμα τέτοιου πίνακα με $\mathrm{rank}(A) = n - 1$.
(γ) Για $n \ge 2$, δώστε παράδειγμα τέτοιου πίνακα με $\mathrm{rank}(A) = n$.

89. Έστω επί απεικόνιση $f : \mathbb{R}^{n\times n} \to \{0, 1, \ldots, n\}$ για την οποία ισχύει $f(AB) \le \min\{f(A), f(B)\}$ για όλους τους πίνακες $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Δείξτε ότι $f(A) = \mathrm{rank}(A)$ για κάθε $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ως εξής:

(α) Δείξτε ότι $f(PA) = f(AP) = f(A)$ για κάθε $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ και κάθε αντιστρέψιμο πίνακα $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$.
(β) Για $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ δείξτε ότι $f(A) = f(J_k)$, όπου $k = \mathrm{rank}(A)$ και J_k είναι ο διαγώνιος πίνακας τάξης k με στοιχεία $1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0$ στην κύρια διαγώνιο.
(γ) Δείξτε ότι $f(J_k) \le f(J_{k+1})$ για $k = 0, 1, \ldots, n - 1$.
(δ) Συνάγετε ότι $f(A) = \mathrm{rank}(A)$ για κάθε $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Ο Διανυσματικός Χώρος $\mathbb{F}^{n\times 1}$

Ορίζουμε τον πυρήνα ενός πίνακα $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ ως $\ker(A) := \{x \in \mathbb{F}^{n\times 1} : Ax = 0\}$ και την απεικόνιση $L_A : \mathbb{F}^{n\times 1} \to \mathbb{F}^{m\times 1}$ θέτοντας $L_A(x) = Ax$ για $x \in \mathbb{F}^{n\times 1}$.

90. Δίνεται πίνακας $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$. Δείξτε ότι οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες:

(α) Οι στήλες του A παράγουν το χώρο $\mathbb{F}^{m\times 1}$.
(β) Το γραμμικό σύστημα $Ax = b$ είναι συμβιβαστό για κάθε $b \in \mathbb{F}^{m\times 1}$.
(γ) Η απεικόνιση $L_A : \mathbb{F}^{n\times 1} \to \mathbb{F}^{m\times 1}$ είναι επί.
(δ) $\mathrm{rank}(A) = m$.

91. Δίνεται πίνακας $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$. Δείξτε ότι οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες:

(α) Οι στήλες του A είναι γραμμικώς ανεξάρτητα στοιχεία του $\mathbb{F}^{m\times 1}$.
(β) Το ομογενές γραμμικό σύστημα $Ax = 0$ έχει μόνο την τετριμμένη λύση $x = 0$.
(γ) Η απεικόνιση $L_A : \mathbb{F}^{n\times 1} \to \mathbb{F}^{m\times 1}$ είναι 1–1.
(δ) $\mathrm{rank}(A) = n$.

92. Έστω διακεκριμένοι πραγματικοί αριθμοί $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ που δεν ανήκουν στο σύνολο $\{-1, -2, \ldots, -n\}$. Δείξτε ότι οι στήλες του πίνακα

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1+1} & \frac{1}{\lambda_1+2} & \cdots & \frac{1}{\lambda_1+n} \\ \frac{1}{\lambda_2+1} & \frac{1}{\lambda_2+2} & \cdots & \frac{1}{\lambda_2+n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{\lambda_n+1} & \frac{1}{\lambda_n+2} & \cdots & \frac{1}{\lambda_n+n} \end{pmatrix}$$

είναι γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα του $\mathbb{R}^{n\times 1}$.

93. Έστω W το σύνολο των στοιχείων $(x_1\ x_2\ \cdots\ x_n)^t$ του διανυσματικού χώρου $\mathbb{F}^{n\times 1}$ που ικανοποιούν τη σχέση $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$.

(α) Δείξτε ότι το W είναι υπόχωρος του $\mathbb{F}^{n\times 1}$.
(β) Υπολογίστε τη διάσταση του W και βρείτε μια βάση αυτού.

94. Δίνεται πίνακας $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$.

(α) Δείξτε ότι η διάσταση του υπόχωρου του $\mathbb{F}^{m\times 1}$ που παράγεται από τις στήλες του A είναι ίση με την τάξη του A.
(β) Συνάγετε ότι η διάσταση του υπόχωρου του $\mathbb{F}^{m\times 1}$ που παράγεται από τις στήλες του A είναι ίση με τη διάσταση του υπόχωρου του $\mathbb{F}^{n\times 1}$ που παράγεται από τις στήλες του A^t.

95. Δείξτε ότι $\dim\ker(A) = n - \operatorname{rank}(A)$ για κάθε πίνακα $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$.

96. Βρείτε όλους τους υπόχωρους W του $\mathbb{R}^{n\times 1}$ με την ιδιότητα: αν $(x_1\ x_2\ \cdots\ x_n)^t \in W$ και σ είναι μετάθεση του συνόλου $\{1, 2, \ldots, n\}$, τότε $(x_{\sigma(1)}\ x_{\sigma(2)}\ \cdots\ x_{\sigma(n)})^t \in W$. Ποιες είναι οι δυνατές τιμές της διάστασης ενός τέτοιου υπόχωρου;

97. Δείξτε ότι για κάθε υπόχωρο W του χώρου $\mathbb{F}^{n\times 1}$ υπάρχουν θετικός ακέραιος r και πίνακας $A \in \mathbb{F}^{r\times n}$ τέτοιοι ώστε $W = \ker(A)$.

98. Δείξτε ότι για τον προσαρτημένο πίνακα $adj(A)$ ενός πίνακα $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ ισχύουν:

(α) Αν $\operatorname{rank}(A) = n$, τότε $\operatorname{rank}(adj(A)) = n$.
(β) Αν $\operatorname{rank}(A) = n - 1$, τότε $\operatorname{rank}(adj(A)) = 1$.
(γ) Αν $\operatorname{rank}(A) \leq n - 2$, τότε $\operatorname{rank}(adj(A)) = 0$.

99. Βρείτε όλους τους θετικούς ακεραίους n που έχουν την εξής ιδιότητα: αν $A = (a_{ij})$ είναι $n\times n$ πίνακας με στοιχεία μη μηδενικούς πραγματικούς αριθμούς, τότε είναι δυνατόν να πολλαπλασιάσουμε κάθε στοιχείο a_{ij} του A με κάποιον θετικό πραγματικό αριθμό b_{ij} έτσι ώστε ο πίνακας που θα προκύψει να έχει ορίζουσα μηδέν.

Αφηρημένοι Διανυσματικοί Χώροι

Συμβολίζουμε με $\dim(V)$ τη διάσταση ενός διανυσματικού χώρου V και με $\mathbb{F}_n[x]$ τον $\mathbb{F}$-διανυσματικό χώρο όλων των πολυωνύμων $p(x) \in \mathbb{F}[x]$ βαθμού μικρότερου ή ίσου του n.

100. Για τα διανύσματα $v_1, v_2, \ldots, v_n$ ενός διανυσματικού χώρου V επί του $\mathbb{F}$ ισχύουν οι ισότητες

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_j \ = \ 0_V, \qquad\qquad i = 1, 2, \ldots, m$$

για κάποιους συντελεστές $a_{ij} \in \mathbb{F}$, όπου 0_V είναι το μηδενικό στοιχείο του V. Αν η τάξη του πίνακα $A = (a_{ij}) \in \mathbb{F}^{m \times n}$ είναι ίση με n, δείξτε ότι $v_1 = v_2 = \cdots = v_n = 0_V$.

101. Δίνονται γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα $u_1, u_2, \ldots, u_n$ ενός διανυσματικού χώρου V και διανύσματα $v_1, v_2, \ldots, v_m$ που παράγουν το V. Χρησιμοποιήστε την Άσκηση 30 για να δείξετε ότι $n \le m$.

102. Υπολογίστε τη διάσταση των παρακάτω υπόχωρων του $\mathbb{F}^{n \times n}$:

(α) του υπόχωρου των άνω τριγωνικών $n \times n$ πινάκων,
(β) του υπόχωρου των άνω τριγωνικών $n \times n$ πινάκων, κάθε στοιχείο στην κύρια διαγώνιο των οποίων είναι ίσο με μηδέν,
(γ) του υπόχωρου των συμμετρικών $n \times n$ πινάκων,
(δ) του υπόχωρου των αντισυμμετρικών $n \times n$ πινάκων.

103. Δίνεται το σύνολο $W_n = \{A \in \mathbb{F}^{n \times n} : \mathrm{tr}(A) = 0\}$ όλων των $n \times n$ πινάκων με στοιχεία από το $\mathbb{F}$, το ίχνος των οποίων είναι ίσο με μηδέν.

(α) Δείξτε ότι το W_n είναι γνήσιος υπόχωρος του $\mathbb{F}^{n \times n}$. Ποια είναι η διάστασή του;
(β) Συνάγετε ότι οποιοιδήποτε πίνακες $A_1, A_2, \ldots, A_{n^2} \in \mathbb{F}^{n \times n}$ με $\mathrm{tr}(A_i) = 0$ για $1 \le i \le n^2$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα στοιχεία του $\mathbb{F}^{n \times n}$.
(γ) Βρείτε γραμμικώς ανεξάρτητα στοιχεία $A_1, A_2, \ldots, A_{n^2}$ του $\mathbb{F}^{n \times n}$, τέτοια ώστε $\mathrm{tr}(A_i) = 1$ για $1 \le i \le n^2$.
(δ) Έστω πίνακας $B \in \mathbb{F}^{n \times n}$ ο οποίος δεν είναι πολλαπλάσιο του I_n και έστω πίνακες $A_1, A_2, \ldots, A_{n^2} \in \mathbb{F}^{n \times n}$. Αν ισχύει $A_i B = B A_i$ για $1 \le i \le n^2$, δείξτε ότι οι $A_1, A_2, \ldots, A_{n^2}$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα στοιχεία του $\mathbb{F}^{n \times n}$.

104. Έστω V το σύνολο των πινάκων στο $\mathbb{F}^{m\times n}$ των οποίων τα στοιχεία κάθε γραμμής και κάθε στήλης έχουν άθροισμα μηδέν.

(α) Δείξτε ότι ο V είναι γραμμικός υπόχωρος του $\mathbb{F}^{m\times n}$.
(β) Βρείτε μια βάση του V για $m = 2$ και τυχαίο n.
(γ) Βρείτε μια βάση του V για τυχαία m και n.
(δ) Συνάγετε ότι $\dim(V) = (m-1)(n-1)$.

105. Δίνονται πολυώνυμα $\phi_0(x), \phi_1(x), \ldots, \phi_n(x) \in \mathbb{F}_n[x]$.

(α) Αν το $\phi_i(x)$ έχει βαθμό ίσο με i για $0 \le i \le n$ (οπότε το $\phi_0(x)$ είναι μη μηδενικό σταθερό πολυώνυμο), δείξτε ότι η $(\phi_0(x), \phi_1(x), \ldots, \phi_n(x))$ είναι βάση του $\mathbb{F}_n[x]$.
(β) Έστω $a \in \mathbb{F}$. Συνάγετε από το (α) ότι τα πολυώνυμα $\phi_i(x) = (x-a)^i$ για $0 \le i \le n$ αποτελούν τα στοιχεία μιας βάσης του $\mathbb{F}_n[x]$.
(γ) Αν $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, εκφράστε ένα τυχαίο πολυώνυμο $p(x) \in \mathbb{F}_n[x]$ ως γραμμικό συνδυασμό των στοιχείων της βάσης του ερωτήματος (β).

106. Έστω $a \in \mathbb{F}$.

(α) Δείξτε ότι το σύνολο $W = \{p(x) \in \mathbb{F}_n[x] : p(a) = 0\}$ είναι γνήσιος υπόχωρος του διανυσματικού χώρου $\mathbb{F}_n[x]$.
(β) Αν $p_0(x), p_1(x), \ldots, p_n(x) \in \mathbb{F}_n[x]$ και $p_i(a) = 0$ για $0 \le i \le n$, δείξτε ότι τα $p_0(x), p_1(x), \ldots, p_n(x)$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα στοιχεία του $\mathbb{F}_n[x]$.
(γ) Έστω μη μηδενικό στοιχείο $b \in \mathbb{F}$. Δείξτε ότι υπάρχουν γραμμικώς ανεξάρτητα $p_0(x), p_1(x), \ldots, p_n(x) \in \mathbb{F}_n[x]$, τέτοια ώστε $p_i(a) = b$ για $0 \le i \le n$.

107. Δίνονται ανά δύο διακεκριμένα στοιχεία $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ενός σώματος $\mathbb{F}$ και τα πολυώνυμα $\phi(x) = (x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)$ και $\phi_i(x) = \phi(x)/(x-a_i)$ για $1 \le i \le n$ του $\mathbb{F}[x]$.

(α) Δείξτε ότι τα $\phi_1(x), \phi_2(x), \ldots, \phi_n(x)$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα στοιχεία του $\mathbb{F}$-διανυσματικού χώρου $\mathbb{F}[x]$.
(β) Δείξτε ότι κάθε πολυώνυμο $p(x) \in \mathbb{F}[x]$ με βαθμό μικρότερο του n γράφεται στη μορφή

$$p(x) = c_1\phi_1(x) + c_2\phi_2(x) + \cdots + c_n\phi_n(x)$$

με $c_i = \frac{p(a_i)}{\phi'(a_i)}$ για $1 \le i \le n$.

108. Δίνονται τα στοιχεία $\phi_i(x) = x^i(1+x)^{n-i}$ του $\mathbb{F}_n[x]$ για $0 \le i \le n$.

(α) Δείξτε ότι η $\mathcal{B}_n = (\phi_0(x), \phi_1(x), \dots, \phi_n(x))$ είναι βάση του $\mathbb{F}_n[x]$.
(β) Για $0 \le k \le n$, εκφράστε το μονώνυμο x^k ως γραμμικό συνδυασμό των στοιχείων της βάσης $\mathcal{B}_n$.
(γ) Αν $n = 4$, πράξτε ομοίως για το πολυώνυμο $p(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4$.

109. Δίνεται διανυσματικός χώρος V διάστασης n και υπόχωροί του U και W. Δείξτε ότι οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες:

(i) $V = U \oplus W$.
(ii) $V = U + W$ και $\dim(U) + \dim(W) = n$.
(iii) Υπάρχουν βάσεις $\mathcal{B}$ και C των U και W, αντίστοιχα, με $\mathcal{B} \cap C = \emptyset$, η ένωση των οποίων είναι βάση του V.
(iv) Για οποιεσδήποτε βάσεις $\mathcal{B}$ και C των U και W, αντίστοιχα, ισχύει $\mathcal{B} \cap C = \emptyset$ και η ένωση $\mathcal{B} \cup C$ είναι βάση του V.

110. Έστω $V_n = \mathbb{R}_n[x]$. Συμβολίζουμε με U_n το σύνολο των πολυωνύμων $p(x) \in V_n$ για τα οποία ισχύει $p(-x) = p(x)$ και με W_n το σύνολο των πολυωνύμων $q(x) \in V_n$ για τα οποία ισχύει $q(-x) = -q(x)$.

(α) Δείξτε ότι τα σύνολα U_n και W_n είναι υπόχωροι του διανυσματικού χώρου V_n.
(β) Υπολογίστε τις διαστάσεις των U_n και W_n.
(γ) Δείξτε ότι $V_n = U_n \oplus W_n$.

111. Δίνεται ένας $\mathbb{F}$-διανυσματικός χώρος V διάστασης n και ένας γνήσιος υπόχωρος U του V. Δείξτε ότι ο U είναι ίσος με την τομή όλων των υπόχωρων διάστασης $n-1$ του V που περιέχουν τον U.

112. Δίνεται διανυσματικός χώρος V διάστασης n.

(α) Έστω U και W υπόχωροι του V διάστασης k και $n-1$, αντίστοιχα. Δείξτε ότι η διάστασης της τομής $U \cap W$ είναι ίση με $k-1$ ή k και ότι ισχύει $\dim(U \cap W) = k \Leftrightarrow U \subseteq W$.
(β) Αν W_1, W_2 είναι δύο διαφορετικοί υπόχωροι του V διάστασης $n-1$, ποιες είναι οι δυνατές τιμές της διάστασης του $W_1 \cap W_2$;
(γ) Έστω ακέραιος $1 \le r \le n$. Αν $W_1, W_2, \dots, W_r$ είναι υπόχωροι του V διάστασης $n-1$, ποιες είναι οι δυνατές τιμές της διάστασης του $W_1 \cap W_2 \cap \cdots \cap W_r$;

113. Δίνονται υπόχωροι U, V, W ενός διανυσματικού χώρου.

(α) Δείξτε ότι $U \cap W + V \cap W \subseteq (U + V) \cap W$.
(β) Ισχύει πάντοτε η ισότητα στο (α);

(γ) Αν οι U, V, W έχουν πεπερασμένη διάσταση, δείξτε ότι

$$\begin{aligned}\dim(U+V+W) &\leq \dim(U)+\dim(V)+\dim(W)-\dim(U\cap V)\\ &\quad -\dim(U\cap W)-\dim(V\cap W)+\dim(U\cap V\cap W).\end{aligned}$$

(δ) Αν οι U, V, W έχουν πεπερασμένη διάσταση, συνάγετε από το (γ) ότι

$$\dim(U)+\dim(V)+\dim(W)-\dim(U+V+W) \ \geq\ m,$$

όπου m είναι ο μέγιστος των ακεραίων $\dim(U\cap V)+\dim(U\cap W)$, $\dim(U\cap V)+\dim(V\cap W)$ και $\dim(U\cap W)+\dim(V\cap W)$.

114. Ένα πολυώνυμο $a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n \in \mathbb{F}_n[x]$ λέγεται *συμμετρικό* (ή *παλινδρομικό*) αν ισχύει $a_i = a_{n-i}$ για $0 \leq i \leq n$. Συμβολίζουμε W_n με το σύνολο των συμμετρικών πολυωνύμων του $\mathbb{F}_n[x]$.

(α) Δείξτε ότι το W_n είναι υπόχωρος του διανυσματικού χώρου $\mathbb{F}_n[x]$.

(β) Δείξτε ότι τα πολυώνυμα $p_i(x) = x^i + x^{n-i}$ για $0 \leq i \leq \lfloor n/2\rfloor$ αποτελούν τα στοιχεία μιας βάσης του W_n και συνάγετε ότι $\dim(W_n) = \lfloor n/2\rfloor + 1$.

(γ) Δείξτε ότι τα πολυώνυμα $\phi_i(x) = x^i + x^{i+1} + \cdots + x^{n-i}$ για $0 \leq i \leq \lfloor n/2\rfloor$ αποτελούν επίσης τα στοιχεία μιας βάσης του W_n.

Θέτουμε τώρα $\mathbb{F} = \mathbb{R}$. Ένα συμμετρικό πολυώνυμο $a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n \in \mathbb{R}_n[x]$ λέγεται *μονότροπο* αν

$$0 \leq a_0 \leq a_1 \leq \cdots \leq a_{\lfloor n/2\rfloor}.$$

(δ) Δείξτε ότι ένα συμμετρικό πολυώνυμο $p(x) \in \mathbb{R}_n[x]$ είναι μονότροπο αν και μόνο αν οι συντεταγμένες του $p(x)$ ως προς τη βάση του του W_n στο ερώτημα (γ) είναι μη αρνητικοί αριθμοί.

(ε) Συνάγετε ότι αν τα πολυώνυμα $p(x) \in \mathbb{R}_n[x]$ και $q(x) \in \mathbb{R}_m[x]$ είναι συμμετρικά και μονότροπα, τότε το γινόμενό τους $p(x)q(x) \in \mathbb{R}_{n+m}[x]$ είναι επίσης συμμετρικό και μονότροπο.

115. Έστω S ένα σύνολο m διανυσμάτων το οποίο παράγει ένα διανυσματικό χώρο V διάστασης $n \geq 2$. Υποθέτουμε ότι το άθροισμα οποιωνδήποτε $m - 1$ στοιχείων του S είναι συγγραμμικό με το στοιχείο του S που περισσεύει (δύο διανύσματα λέγονται συγγραμμικά αν είναι γραμμικώς εξαρτημένα).

(α) Δείξτε ότι $n \leq m - 1$.
(β) Δείξτε ότι το άθροισμα των στοιχείων του S είναι ίσο με το μηδενικό διάνυσμα.

116. Έστω διανυσματικός χώρος V πάνω σε ένα άπειρο σώμα. Δείξτε ότι ο V δεν είναι ίσος με την ένωση πεπερασμένου πλήθους γνήσιων υποχώρων του.

117. Έστω δύο βάσεις $\mathcal{B}$ και C ενός διανυσματικού χώρου V πεπερασμένης διάστασης.

(α) Δείξτε ότι για κάθε $v \in C$ υπάρχει $u \in \mathcal{B}$ τέτοιο ώστε το σύνολο $(\mathcal{B} \setminus \{u\}) \cup \{v\}$ να είναι βάση του χώρου V.
(β) Δείξτε ότι για κάθε $v \in C$ υπάρχει $u \in \mathcal{B}$ τέτοιο ώστε τα σύνολα $(\mathcal{B} \setminus \{u\}) \cup \{v\}$ και $(C \setminus \{v\}) \cup \{u\}$ να είναι και τα δύο βάσεις του χώρου V.

118. Έστω διανυσματικός χώρος V διάστασης n και έστω A ένας $n \times n$ πίνακας με στοιχεία διανύσματα του V. Δώστε απόδειξη ή αντιπαράδειγμα για την ακόλουθη πρόταση: Αν κάθε γραμμή του A είναι βάση του V, τότε είναι δυνατόν να αναδιαταχθεί κάθε γραμμή του A έτσι ώστε κάθε στήλη του πίνακα που θα προκύψει να είναι επίσης βάση του V.

Γραμμικές Απεικονίσεις

Για $\mathbb{F}$-διανυσματικούς χώρους V και W, συμβολίζουμε με $\mathcal{L}(V, W)$ τον $\mathbb{F}$-διανυσματικό χώρο όλων των γραμμικών απεικονίσεων $T : V \to W$. Ο δυ¨κός χώρος V^* του V είναι ο $\mathbb{F}$-διανυσματικός χώρος $\mathcal{L}(V, \mathbb{F})$ όλων των γραμμικών μορφών $T : V \to \mathbb{F}$.

119. Δίνονται ακέραιοι $1 \leq k \leq n$ και η απεικόνιση $T : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n$ η οποία ορίζεται θέτοντας $T(x) = (x_1, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0)$ για $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{F}^n$.

(α) Δείξτε ότι η T είναι γραμμική απεικόνιση και ότι $T(T(x) = T(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{F}^n$.
(β) Βρείτε τον πυρήνα και την εικόνα της T και υπολογίστε τις διαστάσεις τους.
(γ) Για ποιες τιμές των k και n είναι η T ισομορφισμός διανυσματικών χώρων;
(δ) Υπολογίστε τον πίνακα της T ως προς τη συνήθη βάση του $\mathbb{F}^n$.

120. Δίνεται ο γραμμικός μετασχηματισμός $T : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n$ που ορίζεται θέτοντας $T(x) = (x_1 - x_2, x_2 - x_3, \dots, x_n - x_1)$ για $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{F}^n$ (όπου για $n = 1$ έχουμε $T(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{F}$, κατά σύμβαση).

(α) Δείξτε ότι η T είναι γραμμική απεικόνιση.
(β) Βρείτε τον πυρήνα και την εικόνα της T και υπολογίστε τις διαστάσεις τους.
(γ) Έστω $n = 2$ και $\mathbb{F} = \mathbb{R}$. Δείξτε ότι για $x \in \mathbb{R}^2$, το $T(x)$ είναι η ορθογώνια προβολή του $2x$ στην ευθεία $x_1 + x_2 = 0$.

121. Δίνεται η γραμμική απεικόνιση $\mathbb{F}$-διανυσματικών χώρων $T : V \to U$ και υπόχωρος W του V.

(α) Δείξτε ότι η εικόνα $T(W) = \{T(w) : w \in W\}$ του W ως προς την απεικόνιση T είναι υπόχωρος του U.
(β) Αν ο V έχει πεπερασμένη διάσταση, δείξτε ότι το ίδιο ισχύει για την εικόνα $T(W)$ και ότι $\dim T(W) \le \dim(W)$.

122. Δίνεται διανυσματικός χώρος V. Βρείτε όλες τις γραμμικές απεικονίσεις $T : V \to V$ με την εξής ιδιότητα: τα διανύσματα v και $T(v)$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα για κάθε $v \in V$.

123. Δίνεται γραμμικός μετασχηματισμός $T : V \to V$ ενός διανυσματικού χώρου V και διάνυσμα $x \in V$. Αν ισχύουν $T^m(x) = 0$ και $T^{m-1}(x) \neq 0$ για κάποιο θετικό ακέραιο m, δείξτε ότι τα διανύσματα $x, T(x), T^2(x), \dots, T^{m-1}(x)$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

124. Δίνεται γραμμικός μετασχηματισμός $T : V \to V$ ενός διανυσματικού χώρου V.

(α) Αν $x_1, x_2, \dots, x_{2^k}$ είναι στοιχεία του V και ισχύουν $T^m(x_m) \neq 0$ και $T^{2m}(x_m) = 0$ για $1 \le m \le 2^k$, δείξτε ότι τα διανύσματα $x_1, x_2, x_4, \dots, x_{2^k}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.
(β) Αν ο V έχει πεπερασμένη διάσταση, δείξτε ότι υπάρχει θετικός ακέραιος m τέτοιος ώστε $\ker(T^m) \cap \mathrm{Im}(T^m) = \{0\}$.

125. Δίνεται διανυσματικός χώρος V, στοιχεία $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ και γραμμικός μετασχηματισμός $T : V \to V$. Αν $T(v_1) = v_1$, $T(v_i) = v_{i-1} + v_i$ για $2 \le i \le n$ και το v_1 είναι μη μηδενικό διάνυσμα, δείξτε ότι το $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητο υποσύνολο του V.

126. Δίνεται διανυσματικός χώρος V διάστασης n. Αν $\{u_1, \ldots, u_{n+1}\}$ και $\{v_1, \ldots, v_{n+1}\}$ είναι υποσύνολα του V με $n+1$ στοιχεία, κάθε γνήσιο υποσύνολο καθενός από τα οποία είναι γραμμικώς ανεξάρτητο, δείξτε ότι υπάρχει γραμμικός ισομορφισμός $T : V \to V$ τέτοιος ώστε τα διανύσματα $T(u_i)$ και v_i να είναι γραμμικώς εξαρτημένα για κάθε i με $1 \le i \le n+1$.

127. Έστω V ο υπόχωρος του $\mathbb{F}^{m \times n}$ που αποτελείται από τους πίνακες τα στοιχεία κάθε γραμμής και κάθε στήλης των οποίων έχουν άθροισμα μηδέν (βλέπε Άσκηση 104). Για $X \in V$, έστω $T(X) \in \mathbb{F}^{(m-1)\times(n-1)}$ ο πίνακας που προκύπτει από τον X διαγράφοντας την τελευταία γραμμή και στήλη.

(α) Δείξτε ότι η $T : V \to \mathbb{F}^{(m-1)\times(n-1)}$ είναι γραμμική απεικόνιση.
(β) Δείξτε ότι η T είναι ισομορφισμός διανυσματικών χώρων.
(γ) Συνάγετε ότι $\dim(V) = (m-1)(n-1)$.

128. Για $A \in \mathbb{F}^{p \times m}$ και θετικό ακέραιο n θεωρούμε την απεικόνιση $T : \mathbb{F}^{m \times n} \to \mathbb{F}^{p \times n}$ η οποία ορίζεται θέτοντας $T(X) = AX$ για $X \in \mathbb{F}^{m \times n}$.

(α) Δείξτε ότι η απεικόνιση T είναι γραμμική.
(β) Αν $p = m$ και ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος, δείξτε ότι η T είναι ισομορφισμός διανυσματικών χώρων.
(γ) Αν η T είναι ισομορφισμός διανυσματικών χώρων, δείξτε ότι $p = m$ και ότι ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος.

129. Δίνεται γραμμική απεικόνιση $\mathbb{F}$-διανυσματικών $T : V \to W$. Αν ο V έχει πεπερασμένη διάσταση, δείξτε ότι $\dim(V) = \dim\ker(T) + \dim \mathrm{Im}(T)$.

130. Έστω γραμμικοί μετασχηματισμοί $S, T : V \to V$ ενός $\mathbb{F}$-διανυσματικού χώρου V.

(α) Δείξτε ότι ο περιορισμός της T στον υπόχωρο $\ker(ST)$ του V ορίζει μια γραμμική απεικόνιση $R : \ker(ST) \to \ker(S)$.
(β) Δείξτε ότι $\ker(R) = \ker(T)$ και ότι $\mathrm{Im}(R) = \ker(S) \cap \mathrm{Im}(T)$.
(γ) Αν ο V έχει πεπερασμένη διάσταση, συνάγετε ότι $\dim\ker(ST) \le \dim\ker(S) + \dim\ker(T)$ και ότι η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν $\ker(S) \subseteq \mathrm{Im}(T)$.

131. Δίνεται η γραμμική απεικόνιση $\mathbb{F}$-διανυσματικών χώρων $T : V \to U$ και υπόχωρος W του U.

(α) Δείξτε ότι η αντίστροφη εικόνα $T^{-1}(W) = \{v \in V : T(v) \in W\}$ του W ως προς την T είναι υπόχωρος του V.
(β) Έστω $\pi : U \to U/W$ ο φυσικός επιμορφισμός του U επί του χώρου πηλίκο U/W. Δείξτε ότι $T^{-1}(W) = \ker(S)$, όπου S είναι η σύνθεση $\pi \circ T : V \to U/W$.
(γ) Αν οι V και U έχουν πεπερασμένη διάσταση, δείξτε ότι $\dim T^{-1}(W) \geq \dim(V) - \dim(U) + \dim(W)$.

132. Έστω $\mathbb{F}$-διανυσματικοί χώροι $V_0, V_1, \ldots, V_m, V_{m+1}$ με $V_0 = V_{m+1} = \{0\}$. Αν υπάρχουν γραμμικές απεικονίσεις $T_i : V_i \to V_{i+1}$ για $0 \leq i \leq m$, τέτοιες ώστε $\ker(T_i) = \mathrm{Im}(T_{i-1})$ για κάθε $1 \leq i \leq m$, δείξτε ότι

$$\sum_{i=1}^{m} (-1)^i \dim(V_i) \;=\; 0.$$

133. Έστω $\mathbb{F}$-διανυσματικός χώρος V διάστασης n και γραμμικές απεικονίσεις $S, T : V \to V$. Δείξτε ότι:

(α) Αν $\mathrm{Im}(T) = \ker(T)$, τότε ο n είναι άρτιος ακέραιος.
(β) Αν $\mathrm{Im}(S) = \ker(S)$, $\mathrm{Im}(T) = \ker(T)$, $\mathrm{Im}(S) \cap \mathrm{Im}(T) = \mathrm{Im}(ST)$ και $ST = TS$, τότε ο n είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του 4.

134. Για $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ θεωρούμε την απεικόνιση $T_A : \mathbb{F}^{n\times m} \to \mathbb{F}$ η οποία ορίζεται θέτοντας $T_A(X) = \mathrm{tr}(AX)$ για $X \in \mathbb{F}^{n\times m}$.

(α) Δείξτε ότι η T_A είναι γραμμική απεικόνιση για κάθε $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$.
(β) Αν $T_A : \mathbb{F}^{n\times m} \to \mathbb{F}$ είναι η μηδενική απεικόνιση, δείξτε ότι $A = O$.
(γ) Έστω $T : \mathbb{F}^{m\times n} \to (\mathbb{F}^{n\times m})^*$ η απεικόνιση που ορίζεται θέτοντας $T(A) = T_A$ για $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$. Δείξτε ότι η T είναι γραμμική απεικόνιση.
(δ) Δείξτε ότι για κάθε γραμμική απεικόνιση $L : \mathbb{F}^{n\times m} \to \mathbb{F}$ υπάρχει μοναδικός πίνακας $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ τέτοιος ώστε $L = T_A$.

135. Έστω πίνακες $A, B \in \mathbb{F}^{m\times n}$.

(α) Αν υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας $P \in \mathbb{F}^{m\times m}$ τέτοιος ώστε $B = PA$, δείξτε ότι για $x \in \mathbb{F}^{n\times 1}$ ισχύει η ισοδυναμία $Ax = 0 \Leftrightarrow Bx = 0$.
(β) Αν για $x \in \mathbb{F}^{n\times 1}$ ισχύει η ισοδυναμία $Ax = 0 \Leftrightarrow Bx = 0$, δείξτε ότι υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας $P \in \mathbb{F}^{m\times m}$ τέτοιος ώστε $B = PA$.

Τάξη Γραμμικής Απεικόνισης

Υπενθυμίζουμε ότι η τάξη μιας γραμμικής απεικόνισης $T : V \to W$ ορίζεται ως $\mathrm{rank}(T) = \dim \mathrm{Im}(T)$. Ειδικότερα, για κάθε πίνακα $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ η τάξη της γραμμικής απεικόνισης $L_A : \mathbb{F}^{n\times 1} \to \mathbb{F}^{m\times 1}$ που ορίζεται θέτοντας $L_A(x) = Ax$ για $x \in \mathbb{F}^{n\times 1}$ είναι ίση με τη διάσταση του υπόχωρου του $\mathbb{F}^{m\times 1}$ που παράγεται από τις στήλες του A και συνεπώς (Άσκηση 94) ίση με $\mathrm{rank}(A)$.

136. Δίνονται διανυσματικοί χώροι V και W πεπερασμένης διάστασης και γραμμική απεικόνιση $T : V \to W$.

(α) Δείξτε ότι η T είναι μονομορφισμός αν και μόνο αν $\mathrm{rank}(T) = \dim(V)$.
(β) Δείξτε ότι η T είναι επιμορφισμός αν και μόνο αν $\mathrm{rank}(T) = \dim(W)$.
(γ) Συνάγετε ότι η T είναι ισομορφισμός αν και μόνο αν $\mathrm{rank}(T) = \dim(V) = \dim(W)$.

137. Δίνονται $\mathbb{F}$-διανυσματικοί χώροι U, V, W πεπερασμένης διάστασης και γραμμικές απεικονίσεις $T : U \to V$ και $S : V \to W$.

(α) Δείξτε ότι $\mathrm{rank}(ST) \le \min\{\mathrm{rank}(S), \mathrm{rank}(T)\}$.
(β) Συνάγετε ότι $\mathrm{rank}(AB) \le \min\{\mathrm{rank}(A), \mathrm{rank}(B)\}$ για πίνακες $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ και $B \in \mathbb{F}^{n\times p}$.

138. Δίνεται $\mathbb{F}$-διανυσματικός χώρος V διάστασης n και γραμμικές απεικονίσεις $S, T, R : V \to V$.

(α) Δείξτε ότι $\mathrm{rank}(S + T) \le \mathrm{rank}(S) + \mathrm{rank}(T)$.
(β) Δείξτε ότι $\mathrm{rank}(S) + \mathrm{rank}(T) \le n + \mathrm{rank}(ST)$.
(γ) Δείξτε ότι $\mathrm{rank}(SR) + \mathrm{rank}(RT) \le \mathrm{rank}(R) + \mathrm{rank}(SRT)$.

139. Έστω πίνακας $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$. Ποια είναι η μέγιστη δυνατή τιμή της τάξης του A

(α) αν $A^2 = O$;
(β) αν $A^3 = O$;

140. Δίνεται $\mathbb{F}$-διανυσματικός χώρος V διάστασης n και γραμμικός μετασχηματισμός $S : V \to V$. Ορίζουμε το γραμμικό μετασχηματισμό $T : V \to V$ θέτοντας $T(x) = x - S(x)$ για $x \in V$.

(α) Δείξτε ότι $S(T(x)) = T(S(x)$ για κάθε $x \in V$.
(β) Δείξτε ότι $\operatorname{rank}(S) + \operatorname{rank}(T) \geq n$.
(γ) Δείξτε ότι οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες:

(i) $V = \operatorname{Im}(S) \oplus \operatorname{Im}(T)$.
(ii) $\operatorname{Im}(S) \cap \operatorname{Im}(T) = \{0\}$.
(iii) $\operatorname{rank}(S) + \operatorname{rank}(T) = n$.
(iv) $\operatorname{Im}(S) = \ker(T)$.
(v) $\ker(S) = \operatorname{Im}(T)$.
(vi) $S(T(x)) = T(S(x)) = 0$ για κάθε $x \in V$.

Για τυχαίο πίνακα $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ συνάγετε τα εξής:

(δ) $\operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(I - A) \geq n$.
(ε) Ισχύει $\operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(I - A) = n$ αν και μόνο αν $A^2 = A$.

141. Δείξτε ότι:

(α) Για τυχαίους πίνακες $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$ ισχύει $\operatorname{rank}(AB) - \operatorname{rank}(BA) \leq \lfloor n/2 \rfloor$.
(β) Υπάρχουν πίνακες $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$ ώστε $\operatorname{rank}(AB) - \operatorname{rank}(BA) = \lfloor n/2 \rfloor$.
(γ) Αν για τους $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$ ισχύει $AB = O$ και οι πίνακες $A + A^t$ και $B + B^t$ είναι αντιστρέψιμοι, δείξτε ότι $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(B) = n/2$.

142. Έστω διανύσματα $u, v \in \mathbb{C}^n$ με $u \neq 0$. Δείξτε ότι υπάρχει συμμετρικός πίνακας $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ τέτοιος ώστε $Pu = v$.

Πίνακας Γραμμικής Απεικόνισης

143. Δίνονται διανυσματικοί χώροι V και W διάστασης n και m, αντίστοιχα, και γραμμική απεικόνιση $T : V \to W$. Έστω $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ ο πίνακας της T ως προς τυχαίες βάσεις των V και W.

(α) Δείξτε ότι $\operatorname{rank}(T) = \operatorname{rank}(A)$.

Συνάγετε ότι η T είναι:

(β) μονομορφισμός αν και μόνο αν $\operatorname{rank}(A) = n$,
(γ) επιμορφισμός αν και μόνο αν $\operatorname{rank}(A) = m$,
(δ) ισομορφισμός αν και μόνο αν ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος.

144. Θεωρούμε την απεικόνιση $T : \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_n[x]$ που ορίζεται θέτοντας $T(p(x)) = p(x) - p'(x)$ για $p(x) \in \mathbb{R}_n[x]$.

(α) Δείξτε ότι η απεικόνιση T είναι γραμμική.
(β) Βρείτε τον πίνακα της T ως προς τη βάση $(1, x, \dots, x^n)$ του $\mathbb{R}_n[x]$.
(γ) Συνάγετε ότι η T είναι γραμμικός ισομορφισμός και υπολογίστε το ίχνος της.
(δ) Βρείτε όλα τα πολυώνυμα $p(x) \in \mathbb{R}_n[x]$ για τα οποία ισχύει $T(p(x)) = x^n$.
(ε) Υπολογίστε το σταθερό όρο του $p(x) \in \mathbb{R}_n[x]$, αν $T(p(x)) = 1 + x + \cdots + x^n$.

145. Έστω $A \in \mathbb{F}^{p\times m}$, θετικός ακέραιος n και η γραμμική απεικόνιση $T : \mathbb{F}^{m\times n} \to \mathbb{F}^{p\times n}$ η οποία ορίζεται θέτοντας $T(X) = AX$ για $X \in \mathbb{F}^{m\times n}$ (βλέπε Άσκηση 128).

(α) Υπολογίστε τον πίνακα της T ως προς τις συνήθεις βάσεις (κατάλληλα διατεταγμένες) των $\mathbb{F}^{m\times n}$ και $\mathbb{F}^{p\times n}$.
(β) Δείξτε ότι $\operatorname{rank}(T) = n \operatorname{rank}(A)$.
(γ) Συνάγετε ότι η T είναι ισομορφισμός διανυσματικών χώρων αν και μόνο αν $p = m$ και ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος.
(δ) Αν $p = m$, δείξτε ότι $\operatorname{tr}(T) = n \operatorname{tr}(A)$, όπου με $\operatorname{tr}(T)$ συμβολίζουμε το ίχνος του πίνακα της T ως προς οποιαδήποτε βάση του $\mathbb{F}^{m\times n}$ (βλέπε Άσκηση 154).

146. Δίνονται πίνακες $A \in \mathbb{F}^{p\times m}$ και $B \in \mathbb{F}^{n\times q}$ και η γραμμική απεικόνιση $T : \mathbb{F}^{m\times n} \to \mathbb{F}^{p\times q}$ η οποία ορίζεται θέτοντας $T(X) = AXB$ για $X \in \mathbb{F}^{m\times n}$.

(α) Δείξτε ότι η απεικόνιση T είναι γραμμική.
(β) Δείξτε ότι η T είναι ισομορφισμός διανυσματικών χώρων αν και μόνο αν $p = m$, $q = n$ και οι πίνακες A και B είναι αντιστρέψιμοι.
(γ) Υπολογίστε τον πίνακα της T ως προς τις συνήθεις βάσεις (κατάλληλα διατεταγμένες) των $\mathbb{F}^{m\times n}$ και $\mathbb{F}^{p\times q}$.
(δ) Έστω ότι ισχύουν $p = m$ και $q = n$. Δείξτε ότι $\mathrm{tr}(T) = \mathrm{tr}(A)\,\mathrm{tr}(B)$ και ότι $\det(T) = (\det(A))^n\,(\det(B))^m$, όπου με $\mathrm{tr}(T)$ και $\det(T)$ συμβολίζουμε το ίχνος και την ορίζουσα του πίνακα της T ως προς οποιαδήποτε βάση του $\mathbb{F}^{m\times n}$ (βλέπε Άσκηση 154).

147. Συμβολίζουμε με V_n τον πραγματικό διανυσματικό χώρο διάστασης 2^n μια βάση του οποίου είναι το σύνολο όλων των υποσυνόλων του συνόλου $[n] := \{1, 2, \ldots, n\}$. Θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση $\varphi_n : V_n \to V_n$ που ορίζεται θέτοντας

$$\varphi_n(S) \;=\; \sum_{T\subseteq[n]} (-1)^{|S\cap T|}\cdot T$$

για κάθε $S \subseteq [n]$. Για παράδειγμα, για $n = 2$ έχουμε $\varphi_n(\{1, 2\}) = \varnothing - \{1\} - \{2\} + \{1, 2\}$. Υπολογίστε το ίχνος και την ορίζουσα της φ_n. Συνάγετε ότι η φ_n είναι αντιστρέψιμη για κάθε θετικό ακέραιο n.

148. Θεωρούμε γραμμικό μετασχηματισμό $T : V \to V$ ενός $\mathbb{F}$-διανυσματικού χώρου V και θέτουμε $\mathrm{Fix}(T) = \{x \in V : T(x) = x\}$.

(α) Δείξτε ότι το $\mathrm{Fix}(T)$ είναι υπόχωρος του V.
(β) Δείξτε γενικότερα ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{F}$, το σύνολο $V_\lambda(T) = \{x \in V : T(x) = \lambda x\}$ είναι υπόχωρος του V.
(γ) Έστω ότι ο V έχει πεπερασμένη διάσταση. Δείξτε ότι $\mathrm{Fix}(T) \neq \{0\}$ αν και μόνο αν υπάρχει $y \in V$ τέτοιο ώστε $y \neq x - T(x)$ για κάθε $x \in V$.
(δ) Έστω ότι ο V έχει πεπερασμένη διάσταση και έστω $k \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι $\dim \mathrm{Fix}(T) \geq k$ αν και μόνο αν υπάρχει διατεταγμένη βάση του V ως προς την οποία ο πίνακας της T έχει τη μορφή

$$\begin{pmatrix} I_k & B \\ O & C \end{pmatrix}.$$

(ε) Ισχύει το (γ) χωρίς την υπόθεση ότι ο V έχει πεπερασμένη διάσταση;

149. Δίνεται γραμμικός μετασχηματισμός $T : V \to V$ ενός $\mathbb{F}$-διανυσματικού χώρου V για τον οποίο ισχύει $T(T(x)) = T(x)$ για κάθε $x \in V$.

(α) Δείξτε ότι $\mathrm{Im}(T) = \mathrm{Fix}(T)$ (όπου το $\mathrm{Fix}(T)$ ορίστηκε στην Άσκηση 148).

(β) Δείξτε ότι $V = \ker(T) \oplus \mathrm{Fix}(T)$.

(γ) Έστω ότι ο V έχει πεπερασμένη διάσταση. Δείξτε ότι υπάρχει διατεταγμένη βάση του V ως προς την οποία ο πίνακας της T έχει τη μορφή
$$\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}.$$

150. Δίνεται γραμμικός μετασχηματισμός $T : V \to V$ ενός $\mathbb{F}$-διανυσματικού χώρου V για τον οποίο ισχύει $T(T(x)) = x$ για κάθε $x \in V$.

(α) Δείξτε ότι ο T είναι γραμμικός ισομορφισμός.

(β) Θεωρούμε τους υπόχωρους $\mathrm{Fix}(T)$ και $U = \{x \in V : T(x) = -x\}$ του V που ορίστηκαν στην Άσκηση 148. Δείξτε ότι $x + T(x) \in \mathrm{Fix}(T)$ και $x - T(x) \in U$ για κάθε $x \in V$.

Υποθέτουμε τώρα ότι ισχύει $-1 \neq 1$ στο $\mathbb{F}$ (δηλαδή ότι η χαρακτηριστική του $\mathbb{F}$ είναι διάφορη του 2).

(γ) Δείξτε ότι $V = \mathrm{Fix}(T) \oplus U$.

(δ) Έστω ότι ο V έχει πεπερασμένη διάσταση n. Δείξτε ότι υπάρχει διατεταγμένη βάση του V ως προς την οποία ο πίνακας της T έχει τη μορφή
$$\begin{pmatrix} -I_k & O \\ O & I_{n-k} \end{pmatrix}.$$

151. Δίνεται γραμμικός μετασχηματισμός $T : V \to V$ ενός $\mathbb{R}$-διανυσματικού χώρου V για τον οποίο ισχύει $T(T(x)) = -x$ για κάθε $x \in V$.

(α) Δείξτε ότι ο T είναι γραμμικός ισομορφισμός.
(β) Δείξτε ότι για κάθε μη μηδενικό διάνυσμα $x \in V$, τα διανύσματα x και $T(x)$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

Υποθέτουμε τώρα ότι ο V έχει πεπερασμένη διάσταση n.

(γ) Δείξτε ότι υπάρχει βάση του V της μορφής

$$\{u_1, \ldots, u_m\} \cup \{T(u_1), \ldots, T(u_m)\}$$

και συνάγετε ότι ο n είναι άρτιος ακέραιος.
(δ) Δείξτε ότι υπάρχει διατεταγμένη βάση του V ως προς την οποία ο πίνακας της T έχει τη μορφή

$$\begin{pmatrix} O & -I_m \\ I_m & O \end{pmatrix}.$$

152. Έστω $\mathbb{F}$-διανυσματικός χώρος V διάστασης n και γραμμική απεικόνιση $T : V \to V$. Έστω επίσης $W_m = \mathrm{Im}(T^m)$ για θετικούς ακεραίους m.

(α) Δείξτε ότι αν ισχύουν $T^m = O$ για κάποιο θετικό ακέραιο m και $W_i \neq \{0\}$, τότε $\dim(W_{i+1}) < \dim(W_i)$.
(β) Δείξτε ότι υπάρχει θετικός ακέραιος m, τέτοιος ώστε $T^m = O$ αν και μόνο αν υπάρχει βάση του V ως προς την οποία ο πίνακας της T είναι άνω τριγωνικός και κάθε στοιχείο στην κύρια διαγώνιό του είναι ίσο με μηδέν.
(γ) Δείξτε ότι αν $T^n = O$ και $T^{n-1} \neq O$, τότε υπάρχει βάση του V ως προς την οποία ο πίνακας της T είναι ίσος με

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

(δ) Δείξτε ότι αν $T^m = O$ για κάποιο θετικό ακέραιο m, τότε $T^n = O$.

Ομοιότητα Πινάκων

Υπενθυμίζουμε ότι δύο πίνακες $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$ λέγονται *όμοιοι* αν αυπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας $P \in \mathbb{F}^{n\times n}$, τέτοιος ώστε $B = P^{-1}AP$.

153. Δίνεται πίνακας $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$.

(α) Έστω ότι $A = \lambda I$ για κάποιο $\lambda \in \mathbb{F}$. Δείξτε ότι αν $B \in \mathbb{F}^{n\times n}$ είναι πίνακας όμοιος με τον A, τότε $B = A$.

(β) Έστω ότι $A \neq \lambda I$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{F}$. Δείξτε ότι υπάρχει πίνακας $B \in \mathbb{F}^{n\times n}$ διάφορος του A, ο οποίος είναι όμοιος με τον A.

154. Δίνονται όμοιοι πίνακες $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$.

(α) Δείξτε ότι $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(B)$, ότι $\det(A) = \det(B)$ και ότι $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(B)$.

(β) Δείξτε ότι οι πίνακες A^m και B^m είναι όμοιοι για κάθε $m \in \mathbb{N}$.

(γ) Δείξτε ότι οι πίνακες $\phi(A)$ και $\phi(B)$ είναι όμοιοι για κάθε πολυώνυμο $\phi(x) \in \mathbb{F}[x]$.

(δ) Έστω $n \geq 2$ και $C, D \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Αν για κάθε ακέραιο $m \geq 2$ οι πίνακες C^m και D^m είναι όμοιοι, είναι υποχρεωτικά οι C και D όμοιοι;

155. Δίνεται ο πίνακας $C = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{n\times n}$, όπου $n \geq 2$.

(α) Δείξτε ότι αν ο πίνακας $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ είναι όμοιος με τον C, τότε $A^2 = O$ και $A \neq O$.

(β) Για $n = 2$, δείξτε ότι κάθε μη μηδενικός πίνακας $A \in \mathbb{F}^{2\times 2}$ με $A^2 = O$ είναι όμοιος με τον C.

(γ) Για $n = 3$, δείξτε ότι κάθε μη μηδενικός πίνακας $A \in \mathbb{F}^{3\times 3}$ με $A^2 = O$ είναι όμοιος με τον C.

(δ) Ισχύει το ίδιο για $n = 4$;

156. Να εξετάσετε αν είναι όμοιοι οι ακόλουθοι πίνακες:

(α) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{4\times 4}$ και $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{4\times 4}$.

(β) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{4\times 4}$ και $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{4\times 4}$.

157. Δίνονται ακέραιοι $0 \le r \le n$ και ο πίνακας $J_r = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{n\times n}$.

(α) Δείξτε ότι για κάθε πίνακα $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ που είναι όμοιος με τον J_r ισχύει $A^2 = A$.

(β) Δείξτε ότι αν για τον πίνακα $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ ισχύει $A^2 = A$, τότε ο A είναι όμοιος με τον J_r όπου $r = \mathrm{rank}(A)$.

158. Δίνονται ακέραιοι $0 \le k \le n$ και ο πίνακας $J_k = \begin{pmatrix} -I_k & O \\ O & I_{n-k} \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{n\times n}$.

(α) Δείξτε ότι για κάθε πίνακα $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ που είναι όμοιος με τον J_k ισχύει $A^2 = I$.

(β) Δείξτε ότι αν για τον πίνακα $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ έχουμε $A^2 = I$ και ισχύει $-1 \neq 1$ στο $\mathbb{F}$, τότε ο A είναι όμοιος με τον J_k για κάποια τιμή του k.

(γ) Αληθεύει το (β) χωρίς την υπόθεση ότι ισχύει $-1 \neq 1$ στο $\mathbb{F}$;

159. Δίνεται ο πίνακας $J_m = \begin{pmatrix} O & -I_m \\ I_m & O \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{2m\times 2m}$.

(α) Δείξτε ότι για κάθε πίνακα $A \in \mathbb{F}^{2m\times 2m}$ που είναι όμοιος με τον J_m ισχύει $A^2 = -I$.

(β) Δείξτε ότι αν για τον πίνακα $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ ισχύει $A^2 = -I$, τότε ο n είναι άρτιος και ο A είναι όμοιος με τον πίνακα J_m για $m = n/2$.

160. Έστω

$$A_n(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{n\times n}$$

για $\lambda \in \mathbb{F}$. Δείξτε ότι οι πίνακες $A_n(\lambda)$ και $A_n(\mu)$ είναι όμοιοι για τυχαία μη μηδενικά στοιχεία $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$.

Χαρακτηριστικό Πολυώνυμο

Γράφουμε $\chi_A(x) = \det(A - xI)$ για το χαρακτηριστικό πολυώνυμο ενός τετραγωνικού πίνακα A.

161. Έστω πίνακας $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ τάξης r.

(α) Δείξτε ότι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\chi_A(x)$ διαιρείται με το x^{n-r}.

(β) Αν $r = 1$, δείξτε ότι $\chi_A(x) = (-x)^{n-1}(x - c)$, όπου $c = \mathrm{tr}(A)$.

162. Έστω θετικοί ακέραιοι p, q. Συμβολίζουμε με J τον πίνακα καταλλήλων διαστάσεων, κάθε στοιχείο του οποίου είναι ίσο με 1. Υπολογίστε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο:

(α) του $p \times p$ πίνακα $J + qI_p$,

(β) του $(p + q) \times (p + q)$ πίνακα $\begin{pmatrix} qI_p & -J \\ -J & pI_q \end{pmatrix}$.

163. Δίνεται ο πίνακας

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n\times n},$$

όπου $n \geq 2$.

(α) Υπολογίστε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A_n.

(β) Για ποιες τιμές του n είναι ο A_n αντιστρέψιμος;

164. Για πίνακες $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ και $B \in \mathbb{F}^{n\times m}$ δείξτε ότι

$$x^n \det(xI_m - AB) = x^m \det(xI_n - BA).$$

165. Έστω αντιστρέψιμος πίνακας $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ με $\chi_A(x) = (\lambda_1 - x)(\lambda_2 - x)\cdots(\lambda_n - x)$, για κάποια $\lambda_i \in \mathbb{F}$.

(α) Δείξτε ότι $\lambda_i \neq 0$ για κάθε δείκτη i και ότι

$$\chi_{A^{-1}}(x) = (\frac{1}{\lambda_1} - x)(\frac{1}{\lambda_2} - x)\cdots(\frac{1}{\lambda_n} - x).$$

(β) Αν ο A είναι όμοιος με τον A^{-1} και ο n είναι περιττός, δείξτε ότι $\lambda_i \in \{-1, 1\}$ για έναν τουλάχιστον δείκτη $1 \leq i \leq n$.

166. Έστω πίνακας $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ τα στοιχεία κάθε γραμμής και κάθε στήλης του οποίου έχουν άθροισμα μηδέν. Αν A_{ij} είναι ο πίνακας που προκύπτει από τον A διαγράφοντας την i γραμμή και τη j στήλη και

$$\chi_A(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i x^i,$$

δείξτε ότι $c_1 = (-1)^{i+j-1}\, n \det(A_{ij})$. Συνάγετε ότι η απόλυτη τιμή της $\det(A_{ij})$ είναι ανεξάρτητη των i και j.

167. Έστω $\mathbb{F}$-διανυσματικοί χώροι $V_0, V_1, \ldots, V_m, V_{m+1}$ με $V_0 = V_{m+1} = \{0\}$ και γραμμικές απεικονίσεις $f_i : V_i \to V_{i+1}$ για $0 \leq i \leq m$, τέτοιες ώστε $\ker f_i = \operatorname{Im} f_{i-1}$ για κάθε $1 \leq i \leq m$. Έστω γραμμικοί ενδομορφισμοί $T_i : V_i \to V_i$ για $1 \leq i \leq m$, τέτοιοι ώστε

$$T_{i+1} \circ f_i = f_i \circ T_i$$

για $1 \leq i \leq m-1$. Αν $p_i(x)$ είναι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του $T_i : V_i \to V_i$ για $1 \leq i \leq m$, δείξτε ότι

$$p_1(x)\, p_3(x) \cdots = p_2(x)\, p_4(x) \cdots$$

- για $m = 2$,
- για $m = 3$,
- για τυχαίο θετικό ακέραιο m.

Συνάγετε από τα παραπάνω το ζητούμενο της Άσκησης 132.

168. Έστω ένα άπειρο σώμα $\mathbb{F}$ και $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$. Αν ο πίνακας $(A+B)^2$ είναι συμμετρικός για κάθε συμμετρικό πίνακα $B \in \mathbb{F}^{n\times n}$ για τον οποίο ο $A + B$ είναι αντιστρέψιμος, δείξτε ότι ο A είναι συμμετρικός πίνακας.

169. Για τους πίνακες $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ έχουμε $\det(A + rB) = 0$ για $r \in \{1, 2, \ldots, n+1\}$. Ισχύει υποχρεωτικά ότι $\det(A) = 0$;

170. Για έναν $n \times n$ πίνακα A με στοιχεία ακέραιους αριθμούς ισχύει $\det(A^3 - I) = 1$.

(α) Δείξτε ότι $\det(A - I) = 1$.
(β) Αν $n = 2$, δείξτε ότι $A^2 = O$.

Ιδιοτιμές και Ιδιοδιανύσματα

171. Δίνεται άνω τριγωνικός πίνακας $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ για τον οποίο τα στοιχεία επί της κύριας διαγωνίου είναι όλα ίσα με $\lambda \in \mathbb{F}$ και εκείνα πάνω από την κύρια διαγώνιο είναι μη μηδενικά. Υπολογίστε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του A.

172. Υπολογίστε τις ιδιοτιμές του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & c & b \\ b & c & 0 & a \\ c & b & a & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{4\times 4}$$

για $a, b, c \in \mathbb{F}$.

173. Υπολογίστε τις ιδιοτιμές και τους ιδιοχώρους του πίνακα $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ με $a_{ij} = ij$ για όλα τα i, j.

174. Δίνεται ο $2n \times 2n$ πίνακας

$$C_n = \begin{pmatrix} a & b & a & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & a \\ a & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & a & b & \cdots & a \end{pmatrix},$$

με $a, b \in \mathbb{C}$.

(α) Υπολογίστε την τάξη του C_n.
(β) Υπολογίστε τις ιδιοτιμές και το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του C_n.
(γ) Υπολογίστε την ορίζουσα του πίνακα που προκύπτει από τον C_n αντικαθιστώντας κάθε στοιχείο της διαγωνίου του με δοσμένο $c \in \mathbb{C}$.

175. Δίνεται πίνακας $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ και πολυώνυμο $p(x) \in \mathbb{F}[x]$.

(α) Αν το $\lambda \in \mathbb{F}$ είναι ιδιοτιμή του A, δείξτε ότι το $p(\lambda)$ είναι ιδιοτιμή του $p(A)$.
(β) Δείξτε ότι το πολυώνυμο $\det(p(A) - p(x)I)$ διαιρείται από το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\chi_A(x)$.

176. Έστω V ένας $\mathbb{F}$-διανυσματικός χώρος διάστασης n και γραμμική απεικόνιση $T : V \to V$. Έστω ότι υπάρχουν $n+1$ ιδιοδιανύσματα της T, οποιαδήποτε n από τα οποία είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Δείξτε ότι υπάρχει $\lambda \in \mathbb{F}$ με $T(x) = \lambda x$ για κάθε $x \in V$.

177. Δίνονται πίνακες $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$.

(α) Αν οι A και B είναι όμοιοι, δείξτε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{F}$ οι ιδιοχώροι των A και B με αντίστοιχη ιδιοτιμή λ έχουν ίσες διαστάσεις.

(β) Έστω ότι $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ και ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{C}$, οι ιδιοχώροι των A και B με αντίστοιχη ιδιοτιμή λ έχουν ίσες διαστάσεις. Είναι υποχρεωτικά οι A και B όμοιοι;

178. Δίνονται πίνακες $A, B, C \in \mathbb{C}^{n\times n}$ με $AB = BA$, $AC = CA$ και $BC = CB$.

(α) Δείξτε ότι υπάρχουν $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{C}$ και μη μηδενικό διάνυσμα $y \in \mathbb{C}^n$, τέτοια ώστε $Ay = \lambda y$, $By = \mu y$ και $Cy = \nu y$.

(β) Συνάγετε ότι υπάρχουν $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, τέτοια ώστε $\det(\alpha A + \beta B + \gamma C) = 0$.

179. Έστω πίνακας $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ για τον οποίο ισχύουν $a_{ii} = 1$ και $\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \le 2$ για $1 \le i \le n$.

(α) Δείξτε ότι $|\lambda - 1| \le 1$ για κάθε ιδιοτιμή $\lambda \in \mathbb{C}$ του A.

(β) Αν όλες οι ιδιοτιμές του A είναι πραγματικοί αριθμοί, δείξτε ότι $0 \le \det(A) \le 1$.

Διαγωνισιμότητα και Κανονικές Μορφές

180. Δίνεται η ακολουθία (F_n) με $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ και $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ για $n \ge 2$.

(α) Δείξτε ότι $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}$ για $n \ge 1$.

(β) Δείξτε ότι $F_n = (\tau_+^n - \tau_-^n) / \sqrt{5}$ για $n \in \mathbb{N}$, όπου $\tau_\pm = (1 \pm \sqrt{5})/2$.

181. Έστω πίνακας $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ τάξης $\operatorname{rank}(A) = 1$. Δείξτε ότι ο A είναι διαγωνίσιμος αν και μόνο αν $\operatorname{tr}(A) \ne 0$.

182. Έστω πίνακας $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ και $c \in \mathbb{F}$.

(α) Δείξτε ότι ο A είναι διαγωνίσιμος επί του $\mathbb{F}$ αν και μόνο αν το ίδιο ισχύει για τον $A + cI$.

(β) Έστω $J \in \mathbb{F}^{n\times n}$ ο πίνακας κάθε στοιχείο του οποίου είναι ίσο με 1. Δείξτε ότι για $a, b \in \mathbb{F}$, ο πίνακας $aJ + bI$ είναι διαγωνίσιμος αν και μόνο αν είτε $a = 0$, είτε $na \neq 0$ στο $\mathbb{F}$.

183. Δίνεται πίνακας $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$.

(α) Αν ο A είναι μηδενοδύναμος (δηλαδή $A^m = O$ για κάποιο θετικό ακέραιο m) και διαγωνίσιμος επί του $\mathbb{F}$, δείξτε ότι $A = O$.

(β) Συνάγετε ότι οι μόνοι διαγωνίσιμοι πίνακες μεταξύ εκείνων της Άσκησης 171 είναι οι $A = \lambda I$.

184. Θεωρούμε τον πίνακα A_n της Άσκησης 163.

(α) Βρείτε όλες τις τιμές του n για τις οποίες ο A_n είναι διαγωνίσιμος επί του $\mathbb{C}$.

(β) Βρείτε όλες τις τιμές του n για τις οποίες ο A_n είναι διαγωνίσιμος επί του $\mathbb{R}$.

185. Δίνεται ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} p & 1 & 1 \\ 1 & p & 1 \\ 1 & 1 & p \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{3\times 3}.$$

(α) Διαγωνοποιήστε τον A επί του $\mathbb{Q}$.

(β) Δείξτε ότι υπάρχει πίνακας $X \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$ με $X^2 = A$ αν και μόνο αν $\sqrt{p+2} \in \mathbb{Q}$.

186. Δίνονται διαγωνίσιμοι πίνακες $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$.

(α) Αν $AB = BA$, δείξτε ότι υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας $P \in \mathbb{F}^{n\times n}$ για τον οποίο οι $P^{-1}AP$ και $P^{-1}BP$ είναι διαγώνιοι πίνακες.

(β) Ισχύει το ίδιο χωρίς την υπόθεση $AB = BA$;

187. Για καθεμιά από τις επόμενες προτάσεις δώστε απόδειξη ή αντιπαράδειγμα.

(α) Αν ο $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ είναι διαγωνίσιμος, τότε ο A^k είναι διαγωνίσιμος για κάθε θετικό ακέραιο k.
(β) Αν οι $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$ είναι διαγωνίσιμοι πίνακες και $AB = BA$, τότε οι $A + B$ και AB είναι επίσης διαγωνίσιμοι πίνακες.
(γ) Αν οι $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$ είναι διαγωνίσιμοι πίνακες, τότε ένας τουλάχιστον από τους πίνακες $A + B$, AB και BA είναι διαγωνίσιμος.
(δ) Αν $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ και $A^3 = I$, τότε ο A είναι διαγωνίσιμος επί του $\mathbb{R}$.
(ε) Αν $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ και $A^3 = I$, τότε ο A είναι διαγωνίσιμος επί του $\mathbb{C}$.

188. Έστω ακέραιος $n \geq 2$. Για καθεμιά από τις επόμενες προτάσεις δώστε απόδειξη ή αντιπαράδειγμα.

(α) Αν $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, τότε υπάρχει τουλάχιστον ένας θετικός ακέραιος m για τον οποίο ο πίνακας A^m είναι διαγωνίσιμος.
(β) Αν $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ και ο A^m είναι διαγωνίσιμος για κάθε θετικό ακέραιο $m \geq 2$, τότε ο A είναι διαγωνίσιμος.
(γ) Αν $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ και οι A^2 και A^3 είναι διαγωνίσιμοι, τότε ο A^m είναι διαγωνίσιμος για κάθε θετικό ακέραιο $m \geq 2$.
(δ) Αν $A \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ και οι A και A^2 δεν είναι διαγωνίσιμοι, τότε ο A^m δεν είναι διαγωνίσιμος για κανένα θετικό ακέραιο m.
(ε) Αν $A \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ και οι A και A^2 δεν είναι διαγωνίσιμοι, τότε ο A^m δεν είναι διαγωνίσιμος για τουλάχιστον ένα θετικό ακέραιο $m \geq 3$.

189. Δίνονται διαγωνίσιμοι πίνακες $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

(α) Αν $AB = BA$ και $\det(A^2 + B^2) = 0$, δείξτε ότι $\det(A) = \det(B) = 0$.
(β) Ισχύει το ίδιο χωρίς την υπόθεση $AB = BA$;

190. Έστω πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ τέτοιος ώστε $A^3 = A$. Δείξτε ότι

$$\operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(A + I) + \operatorname{rank}(A - I) = 2n.$$

191. Δίνεται $n \times n$ πίνακας της μορφής

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

με στοιχεία από ένα σώμα $\mathbb{F}$. Αν ο A είναι διαγωνίσιμος επί του $\mathbb{F}$, δείξτε ότι οι ιδιοτιμές του είναι ανά δύο διαφορετικά στοιχεία του $\mathbb{F}$.

192. Έστω πίνακας $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$.

(α) Δείξτε ότι υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας $Q \in \mathbb{C}^{n\times n}$ για τον οποίο ο $Q^{-1}AQ$ είναι άνω τριγωνικός.

(β) Αν $\chi_A(x) = (\lambda_1 - x)(\lambda_2 - x)\cdots(\lambda_n - x)$, δείξτε ότι

$$\chi_{p(A)}(x) = (p(\lambda_1) - x)(p(\lambda_2) - x)\cdots(p(\lambda_n) - x)$$

για κάθε πολυώνυμο $p(x) \in \mathbb{C}[x]$.

(γ) Δείξτε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει διαγωνίσιμος πίνακας $B = (b_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, τέτοιος ώστε $|a_{ij} - b_{ij}| < \varepsilon$ για $1 \le i, j \le n$.

193. Δίνεται πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ο οποίος είναι όμοιος με τον A^2.

(α) Ποιες είναι οι δυνατές τιμές της ορίζουσας του A;

(β) Δείξτε ότι για κάθε ιδιοτιμή λ του A, το λ^2 είναι επίσης ιδιοτιμή του A και ότι υπάρχει ιδιοτιμή μ του A τέτοια ώστε $\lambda = \mu^2$.

(γ) Δείξτε ότι για κάθε μη μηδενική ιδιοτιμή λ του A, υπάρχει θετικός ακέραιος m της μορφής $2^k - 1$ τέτοιος ώστε $\lambda^m = 1$.

(δ) Συνάγετε ότι $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{rank}(A)$, αν όλες οι ιδιοτιμές του A είναι πραγματικοί αριθμοί.

194. Βρείτε όλους τους θετικούς ακεραίους n με την εξής ιδιότητα: Αν για τα χαρακτηριστικά και ελάχιστα πολυώνυμα των $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ισχύει $\chi_A(x) = \chi_B(x)$ και $m_A(x) = m_B(x)$, τότε οι πίνακες A και B είναι όμοιοι.

195. Για $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση $T_A : \mathbb{C}^{n\times n} \to \mathbb{C}^{n\times n}$ με $T_A(X) = AX - XA$ για $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$.

(α) Αν οι $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ είναι όμοιοι πίνακες, δείξτε ότι $\dim(\ker T_A) = \dim(\ker T_B)$.
(β) Δείξτε ότι $\dim(\ker T_A) \in \{2, 4\}$ για κάθε πίνακα $A \in \mathbb{C}^{2\times 2}$.
(γ) Δείξτε ότι $\dim(\ker T_A) \geq n$ για κάθε πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$.

196. Δείξτε ότι κάθε αντιστρέψιμος πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ έχει τετραγωνική ρίζα, δηλαδή ότι υπάρχει πίνακας $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$ με $X^2 = A$.

Μηδενοδύναμοι Πίνακες

Υπενθυμίζουμε (Άσκηση 22) ότι ένας τετραγωνικός πίνακας A λέγεται *μηδενοδύναμος* αν $A^m = O$ για κάποιο θετικό ακέραιο m. Ανάλογος ορισμός εφαρμόζεται και για γραμμικούς ενδομορφισμούς $T : V \to V$.

197. Για πίνακα $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$, δείξτε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(α) ο A είναι μηδενοδύναμος,
(β) ισχύει $\det(xI + A) = x^n$ στο $\mathbb{F}[x]$,
(γ) $A^n = O$.

198. Για πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, δείξτε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(α) ο A είναι μηδενοδύναμος,
(β) όλες οι ιδιοτιμές του A είναι ίσες με μηδέν,
(γ) $\mathrm{tr}(A^k) = 0$ για κάθε θετικό ακέραιο k.

199. Έστω πίνακες $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$.

(α) Αν ισχύει $AB - BA = A$, δείξτε ότι ο A είναι μηδενοδύναμος.
(β) Αν $C = AB - BA$ και ισχύει $AC = CA$, δείξτε ότι ο C είναι μηδενοδύναμος.

200. Αν ο πίνακας $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ είναι μηδενοδύναμος, δείξτε ότι ο γραμμικός ενδομορφισμός $T_A : \mathbb{F}^{n\times n} \to \mathbb{F}^{n\times n}$ του $\mathbb{F}^{n\times n}$ που ορίζεται θέτοντας $T_A(X) = AX - XA$ για $X \in \mathbb{F}^{n\times n}$ είναι επίσης μηδενοδύναμος.

201. Δίνονται θετικός ακέραιος n, μηδενοδύναμος πίνακας $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ και πολυώνυμα $P(z), Q(z) \in \mathbb{F}[z]$ με $P(0) \neq 0$ και $Q(0) = 0$.

(α) Δείξτε ότι ο πίνακας $P(A)$ είναι αντιστρέψιμος.
(β) Δείξτε ότι ο πίνακας $Q(A)$ είναι μηδενοδύναμος.
(γ) Δείξτε ότι για κάθε $B \in \mathbb{F}^{n\times n}$ η εξίσωση

$$P(A)X - XQ(A) = B$$

έχει μοναδική λύση $X \in \mathbb{F}^{n\times n}$.

202. Απαντήστε στα ακόλουθα ερωτήματα:

(α) Βρείτε όλους τους θετικούς ακεραίους n για τους οποίους υπάρχει μηδενοδύναμος πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ και αντιστρέψιμος πίνακας $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$, τέτοιοι ώστε ο $P + A$ να είναι μηδενοδύναμος πίνακας.

(β) Δείξτε ότι αν ο $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ είναι μηδενοδύναμος πίνακας, ο $P \in \mathbb{F}^{n\times n}$ είναι αντιστρέψιμος πίνακας και $AP = PA$, τότε ο $P + A$ είναι επίσης αντιστρέψιμος πίνακας και ισχύει $\det(P + A) = \det(P)$.

(γ) Δείξτε ότι αν ο $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ είναι μηδενοδύναμος πίνακας, το σώμα $\mathbb{F}$ είναι άπειρο και $AP = PA$ για κάποιο $P \in \mathbb{F}^{n\times n}$, τότε $\det(P+A) = \det(P)$.

(δ) Έστω $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ και έστω ότι ο $P+A$ είναι αντιστρέψιμος πίνακας για κάθε αντιστρέψιμο πίνακα $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ για τον οποίο ισχύει $AP = PA$. Δείξτε ότι ο A είναι μηδενοδύναμος πίνακας.

203. Έστω $B = (b_{ij}) \in \mathbb{F}^{n\times n}$ ο πίνακας με

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{αν } i = 1 \text{ και } j = n, \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Για ποιους θετικούς ακεραίους n υπάρχει πίνακας $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ τέτοιος ώστε $A^2 = B$;

204. Έστω τυχαίοι πίνακες $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$.

(α) Δείξτε ότι αν $(AB)^{n+1} = O$, τότε $(BA)^{n+1} = O$.

(β) Για ποιους θετικούς ακεραίους n ισχύει ότι αν $(AB)^n = O$, τότε $(BA)^n = O$;

(γ) Για ποιους θετικούς ακεραίους n ισχύει ότι αν $(AB)^2 = O$, τότε $(BA)^2 = O$;

Διγραμμικές Μορφές, Ευκλείδειοι Χώροι

Για πίνακα $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ γράφουμε $\ker(A) = \ker(L_A)$ και $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Im}(L_A)$, όπου $L_A : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$ είναι η γραμμική απεικόνιση με $L_A(x) = Ax$ για $x \in \mathbb{F}^n$.

205. Δίνεται πραγματικός Ευκλείδειος χώρος E. Συμβολίζουμε με $||u||$ το μήκος ενός διανύσματος $u \in$ E.

(α) Δείξτε ότι για $x, y, z \in$ E ισχύει

$$3\left(||x||^2 + ||y||^2 + ||z||^2\right) = ||x + y + z||^2 + ||x - y||^2 + ||y - z||^2 + ||z - x||^2.$$

(β) Δείξτε ότι ανάμεσα σε τρία οποιαδήποτε γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα του E, μπορούν πάντοτε να επιλεγούν δύο τα οποία σχηματίζουν μεταξύ τους γωνία μικρότερη από $2\pi/3$.

(γ) Για διανύσματα $x, y, z \in E$ με $\|x\| = \|y\| = \|z\| = 1$, βρείτε τη μέγιστη δυνατή τιμή του αθροίσματος $\|x - y\| + \|y - z\| + \|z - x\|$.

206. Έστω τυχαίοι πίνακες $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ και ότι ο χώρος $\mathbb{R}^n$ είναι εφοδιασμένος με το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο.

(α) Δείξτε ότι $(\ker(A))^{\perp} = \mathrm{Im}(A^t)$.
(β) Δείξτε ότι $\ker(A) \subseteq \ker(B) \Leftrightarrow \mathrm{Im}(A^t) \supseteq \mathrm{Im}(B^t)$.
(γ) Αν υπάρχει πίνακας $C \in \mathbb{R}^{m\times m}$ τέτοιος ώστε $B = CA$, δείξτε ότι $\ker(A) \subseteq \ker(B)$.
(δ) Έστω ότι $\ker(A) \subseteq \ker(B)$. Υπάρχει υποχρεωτικά πίνακας $C \in \mathbb{R}^{m\times m}$ τέτοιος ώστε $B = CA$;

207. Δίνεται πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

(α) Δείξτε ότι $\ker(A^tA) = \ker(A)$.
(β) Δείξτε ότι $\mathrm{Im}(A^tA) = \mathrm{Im}(A^t)$.
(γ) Συνάγετε ότι $\mathrm{rank}(A^tA) = \mathrm{rank}(A)$.

208. Βρείτε την τάξη και την υπογραφή της συμμετρικής διγραμμικής μορφής $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(AB)$ του χώρου $\mathbb{R}^{n\times n}$.

Συμμετρικοί, Ερμιτιανοί και Ορθογώνιοι Πίνακες

Υπενθυμίζουμε ότι ένας συμμετρικός πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ λέγεται *θετικά ημιορισμένος* αν ισχύει $x^tAx \geq 0$ για κάθε πίνακα - στήλη $x \in \mathbb{R}^n$ και *θετικά ορισμένος* αν ο A είναι θετικά ημιορισμένος και επιπλέον ισχύει $x^tAx = 0$ μόνο για $x = 0$.

209. Δίνονται συμμετρικοί πίνακες $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

(α) Αν οι A, B είναι θετικά ημιορισμένοι, δείξτε ότι ο $A + B$ είναι επίσης θετικά ημιορισμένος.
(β) Αν ο A είναι θετικά ημιορισμένος και ο B είναι θετικά ορισμένος, δείξτε ότι ο $A + B$ είναι θετικά ορισμένος.
(γ) Δείξτε ότι ο $n \times n$ πίνακας

$$\begin{pmatrix} d_1 & t & t & \cdots & t \\ t & d_2 & t & \cdots & t \\ t & t & d_3 & \cdots & t \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t & t & t & \cdots & d_n \end{pmatrix}$$

είναι θετικά ορισμένος για τυχαίους πραγματικούς αριθμούς $d_1, d_2, \ldots, d_n, t$ με $d_1, d_2, \ldots, d_n > t \geq 0$.

210. Έστω πίνακες $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ και $B \in \mathbb{R}^{p\times m}$.

(α) Αν $x \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ και $A^tAx = 0$, δείξτε ότι $Ax = 0$.
(β) Αν $\ker(A) = \mathrm{Im}(B)$, δείξτε ότι ο πίνακας $A^tA + BB^t$ είναι θετικά ορισμένος.

211. Δίνεται συμμετρικός, θετικά ορισμένος πίνακας $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

(α) Δείξτε ότι $\mathrm{tr}(A)\,\mathrm{tr}(A^{-1}) \ge n^2$.
(β) Δείξτε ότι υπάρχει δείκτης $1 \le m \le n$, τέτοιος ώστε να ισχύει $a_{ij} \le a_{mm}$ για όλα τα $1 \le i, j \le n$.

212. Έστω συμμετρικοί, θετικά ημιορισμένοι πίνακες $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

(α) Δείξτε ότι $\det(I + B) \ \ge\ 1 + \det(B)$.
(β) Δείξτε ότι $\det(A + B) \ \ge\ \det(A) + \det(B)$.

213. Έστω $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ το σύνολο των πινάκων $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ με την εξής ιδιότητα: υπάρχει μη μηδενικό πολυώνυμο $p(x)$ με μη αρνητικούς πραγματικούς συντελεστές, τέτοιο ώστε $p(A) = O$.

(α) Δείξτε ότι οι πίνακες που ανήκουν στο $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ δεν έχουν θετικές ιδιοτιμές.
(β) Έστω συμμετρικός πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Δείξτε ότι $A \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ αν και μόνο αν ο A είναι αρνητικά ημιορισμένος.
(γ) Συνάγετε ότι για συμμετρικούς πίνακες $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ισχύει ότι $A, B \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R}) \Rightarrow A + B \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$. Για ποια n ισχύει ότι $A, B \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R}) \Rightarrow A + B \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$;

214. Έστω συμμετρικοί πίνακες $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Αν ένας τουλάχιστον από τους A, B είναι θετικά ημιορισμένος, δείξτε ότι όλες οι ιδιοτιμές του πίνακα AB είναι πραγματικοί αριθμοί.

215. Δίνεται συμμετρικός πίνακας $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

(α) Δείξτε ότι
$$\mathrm{rank}(A) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \right) \ge \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \right)^2,$$
όπου $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ είναι οι ιδιοτιμές του A.
(β) Συνάγετε ότι αν ο A δεν είναι ο μηδενικός πίνακας, τότε
$$\mathrm{rank}(A) \ \ge\ \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ii}\right)^2}{\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2}.$$
(γ) Ισχύει το (β) χωρίς την υπόθεση ότι ο πίνακας A είναι συμμετρικός;

216. Δίνονται n κυκλικοί δίσκοι $K_1, K_2, \ldots, K_n$ στο επίπεδο. Θεωρούμε τον πίνακα $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, όπου a_{ij} είναι το εμβαδό της τομής $K_i \cap K_j$ για $1 \le i, j \le n$.

(α) Δείξτε ότι ο πίνακας A είναι συμμετρικός και θετικά ημιορισμένος.
(β) Συνάγετε ότι $\det(A) \geq 0$.

217. Δείξτε ότι ο μόνος συμμετρικός, θετικά ορισμένος, ορθογώνιος πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ είναι ο ταυτοτικός.

218. Έστω $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ορθογώνιος πίνακας.

(α) Δείξτε ότι $\det(P) = 1$ ή -1.
(β) Αν $\det(P) = -1$, δείξτε ότι το -1 είναι ιδιοτιμή του P.
(γ) Ισχύει το (β) για μοναδιαίους πίνακες $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$;

219. Έστω ότι ο χώρος $\mathbb{C}^n$ είναι εφοδιασμένος με το σύνηθες ερμιτιανό γινόμενο. Δείξτε ότι οι γραμμές ενός πίνακα $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ είναι ορθοκανονικές αν και μόνο αν οι στήλες του U είναι ορθοκανονικές.

220. Έστω πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$.

(α) Δείξτε ότι η ορίζουσα $\det(A^*A + I)$ είναι πραγματικός αριθμός.
(β) Δείξτε ότι $\det(A^*A + I) \geq 1$.

221. Δείξτε ότι

$$|\det(A)|^2 \leq \left(\frac{1}{n}\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2\right)^n$$

για κάθε $n \times n$ πίνακα $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$.

222. Βρείτε όλους τους:

(α) συμμετρικούς μηδενοδύναμους πίνακες $A \in \mathbb{C}^{2\times 2}$,
(β) ερμιτιανούς μηδενοδύναμους πίνακες $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$.

223. Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ένας αντισυμμετρικός (δηλαδή $A^t = -A$) πίνακας.

(α) Αν ο n είναι περιττός, δείξτε ότι $\det(A) = 0$.
(β) Αν ο n είναι άρτιος, δείξτε ότι $\det(A) \geq 0$.
(γ) Δείξτε ότι η τάξη του A είναι άρτιος ακέραιος για κάθε θετικό ακέραιο n.

224. Δίνεται πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ τέτοιος ώστε $A^* - A = 2aI_n$ για κάποιο $a \in \mathbb{C}$.

(α) Δείξτε ότι ο a είναι φανταστικός αριθμός.
(β) Δείξτε ότι κάθε ιδιοτιμή του A έχει φανταστικό μέρος ίσο με a.
(γ) Συνάγετε ότι $|\det(A)| \geq |a|^n$. Υποθέτοντας ότι $a \neq 0$, δείξτε επιπλέον ότι η ισότητα ισχύει μόνο αν $A = aI_n$.

225. Έστω γραμμικές μορφές $T_1, T_2, \ldots, T_m : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$, όπου ο χώρος $\mathbb{C}^n$ είναι εφοδιασμένος με το σύνηθες ερμιτιανό γινόμενο. Αν

$$\sum_{i=1}^{m} \|T_i(z)\|^2 = \|z\|^2$$

για κάθε $z \in \mathbb{C}^n$, δείξτε ότι $m \geq n$.

226. Έστω ερμιτιανός πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ και $T : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ η γραμμική απεικόνιση με $T(x) = Ax$ για $x \in \mathbb{C}^n$.

(α) Αν το $w \in \mathbb{C}^n$ είναι ιδιοδιάνυσμα του A, δείξτε ότι ο υπόχωρος $\{w\}^\perp$ του $\mathbb{C}^n$ είναι T-αναλλοίωτος.

(β) Δείξτε ότι αν ο $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ είναι επίσης ερμιτιανός πίνακας και ισχύει $AB = BA$, τότε υπάρχει μοναδιαίος πίνακας $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ τέτοιος ώστε οι πίνακες U^*AU και U^*BU να είναι διαγώνιοι.

227. Έστω ερμιτιανοί πίνακες $A_1, A_2, \ldots, A_p \in \mathbb{C}^{n\times n}$.

(α) Αν ισχύει $A_iA_j = A_jA_i$ για όλους τους δείκτες $1 \leq i < j \leq p$, δείξτε ότι υπάρχει μοναδιαίος πίνακας $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ τέτοιος ώστε ο πίνακας U^*A_iU να είναι διαγώνιος για κάθε $1 \leq i \leq p$.

(β) Αν ισχύει $A_iA_j = O$ για όλους τους δείκτες $1 \leq i < j \leq p$, δείξτε ότι $\mathrm{rank}(A_1) + \mathrm{rank}(A_2) + \cdots + \mathrm{rank}(A_p) \leq n$.

228. Δείξτε ότι για κάθε συμμετρικό αντιστρέψιμο πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ υπάρχει πίνακας $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ τέτοιος ώστε $A = P^tP$.

229. Έστω διαγώνιος πίνακας $\Delta \in \mathbb{C}^{n\times n}$ και πίνακες $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$.

(α) Αν $\Delta B = B\Delta$, δείξτε ότι $\Delta^* B = B\Delta^*$.

(β) Αν ο A είναι κανονικός και $AB = BA$, δείξτε ότι $A^*B = BA^*$.

(γ) Αν οι A, B είναι κανονικοί και $AB = BA$, δείξτε ότι ο AB είναι επίσης κανονικός.

(δ) Αληθεύει ότι αν οι A, B είναι τυχαίοι κανονικοί πίνακες, τότε ο AB είναι επίσης κανονικός πίνακας;

Διάφορα Προβλήματα

230. Για θετικούς ακεραίους n, r ορίζουμε τα $a_{n,r,k} \in \mathbb{N}$ από την ταυτότητα

$$(1 + x + x^2 + \cdots + x^{r-1})^n = \sum_{k\geq 0} a_{n,r,k}\, x^k,$$

όπου $a_{n,r,k} = 0$ για $k > (r-1)n$. Χρησιμοποιώντας τη θεωρία των γραμμικών συστημάτων και την ορίζουσα του Vandermonde, δείξτε ότι

$$\sum_{q\in\mathbb{N}} a_{n,r,qr+i} = r^{n-1}$$

για κάθε $i \in \{0, 1, \ldots, r-1\}$.

231. Θεωρούμε ότι ο χώρος $\mathbb{C}^{n\times 1}$ είναι εφοδιασμένος με το σύνηθες ερμητιανό γινόμενο. Για $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ θέτουμε

$$\|A\| \;=\; \sup\{\|Az\| : z \in \mathbb{C}^{n\times 1},\ \|z\| = 1\}.$$

Για $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ δείξτε ότι:

(α) $\|Az\| \leq \|A\| \cdot \|z\|$ για κάθε $z \in \mathbb{C}^{n\times 1}$.
(β) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$.
(γ) $\|cA\| = |c| \cdot \|A\|$ για κάθε $c \in \mathbb{C}$.
(δ) $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$.
(ε) $\|A\| = \sqrt{|\lambda|}$ αν ο A είναι ερμητιανός, όπου $|\lambda|$ είναι η μέγιστη απόλυτη τιμή ιδιοτιμής του A.
(στ) $\|A\| = \|A^*\| = \sqrt{\|A^*A\|}$.

232. Δίνεται ο $n \times n$ πίνακας

$$A_n \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1/n & 1/n & 1/n & \cdots & 1/n \end{pmatrix}.$$

(α) Με το συμβολισμό της Άσκησης 231, δείξτε ότι $\|A_n\| \leq 1 + \sqrt{2}$.
(β) Συνάγετε ότι

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_k}{k}\right)^2 \;\leq\; (3 + \sqrt{2}) \sum_{k=1}^{n} x_k^2$$

για $x_1, x_n, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$.

Υποδείξεις - Λύσεις

(1) Θέτοντας $X = ABC$, βρίσκουμε ότι $X^t = C^t B^t A^t = (AB)(CA)(BC) = (ABC)(ABC) = X^2$ και ότι $X = A(BC) = AA^t = X^t$ και συμπεραίνουμε ότι $X = X^2$.

(2) Υπολογίστε τον πίνακα της άσκησης για $n = 1, 2, 3, 4$, μαντέψτε ένα γενικό τύπο και αποδείξτε τον με επαγωγή στο n.

(3) Το (α) αφήνεται στον αναγνώστη. Για το (β) δείξτε πρώτα ότι $(AB)^n = 7^n I$ για $n \in \mathbb{N}$ και παρατηρήστε έπειτα ότι για $n \geq 1$ ισχύει $(BA)^n = (BA)\,(BA)\cdots(BA) = B\,(AB)\cdots(AB)\,A = B\,(AB)^{n-1}A = 7^{n-1}(BA)$.

(4) Για το (α) υπολογίστε ευθέως την παράσταση $A^2 - (a+d)A + (ad-bc)\,I$. Για το (β), συνάγετε από το (α) ότι ισχύει $A^2 = O$ αν και μόνο αν $a + d = ad - bc = 0$. Για το (γ), συνάγετε από το (α) ότι ισχύει $A^2 = I$ αν και μόνο αν είτε $A = I$, είτε $A = -I$, είτε $a + d = 0$ και $ad - bc = 1$. Εργασθείτε παρόμοια για το (δ). Απάντηση: Οι 2×2 πίνακες A με $A^2 = O$ είναι αυτοί της μορφής

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -a^2/b & -a \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix},$$

όπου $a, c \in \mathbb{F}$ και $b \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$. Οι 2×2 πίνακες A με $A^2 = I$ είναι οι $I, -I$ και αυτοί της μορφής

$$\begin{pmatrix} a & b \\ (1-a^2)/b & -a \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix},$$

όπου $a, c \in \mathbb{F}$ και $b \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$. Οι πίνακες $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ με $A^2 = -I$ είναι αυτοί της μορφής

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -(1+a^2)/b & -a \end{pmatrix},$$

όπου $a, c \in \mathbb{R}$ και $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(5) Για το (β) εφαρμόστε επαγωγή στο n, αφού πρώτα αποδείξετε την περίπτωση $n = 1$ με επαγωγή στο m. Για το (γ), εφαρμόζοντας επαγωγή στο n, παρατηρήστε ότι

$$\begin{aligned} (A+B)^n &= (A+B)\,(A+B)^{n-1} = (A+B)\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}A^k B^{n-k-1} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}A^{k+1}B^{n-k-1} + \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}BA^k B^{n-k-1} \end{aligned}$$

και χρησιμοποιήστε τα (α) και (β) για να καταλήξετε στο ζητούμενο τύπο.

(6) Έστω A ο δοσμένος 3×3 πίνακας την n δύναμη του οποίου ζητάμε να υπολογίσουμε. Για το (α) εργασθείτε όπως στην Άσκηση 2, ή γράψτε τον πίνακα A στη μορφή $A = \lambda I + B$ για κατάλληλο 3×3 πίνακα B και αναπτύξτε τον $(\lambda I + B)^n$ σύμφωνα με το Διωνυμικό Θεώρημα (Άσκηση 5 (γ)), παρατηρώντας ότι $B^3 = O$. Απάντηση:

$$A^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} & \frac{1}{2}n(n-1)\,\lambda^{n-2} \\ 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & 0 & \lambda^n \end{pmatrix}.$$

Για το (β), παρατηρήστε ότι $A = J - I$, όπου J είναι ο 3×3 πίνακας κάθε στοιχείο του οποίου είναι ίσο με 1, και ότι οι πίνακες J και I μετατίθενται. Δείξτε ότι $J^m = 3^{m-1}J$ για $m \geq 1$. Εφαρμόζοντας το Διωνυμικό Θεώρημα

(Άσκηση 5 (γ)) στον πίνακα $(J - I)^n$ προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} A^n &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k}\binom{n}{k} J^k = (-1)^n I + \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k}\binom{n}{k} 3^{k-1} J \\ &= (-1)^n I + \frac{1}{3} J \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k}\binom{n}{k} 3^k. \end{aligned}$$

Υπολογίστε το τελευταίο άθροισμα χρησιμοποιώντας το Διωνυμικό Θεώρημα και συμπεράνετε ότι $A^n = c_n J + (-1)^n I$, όπου $c_n = (2^n + (-1)^{n-1})/3$.

(7) Το (α) είναι άμεση συνέπεια του ορισμού του γινομένου πινάκων. Το (β) προκύπτει εύκολα από το (α), αφού αν για τους $n \times n$ πίνακες A, B ισχύει $AX = BX = X$, τότε $(AB)X = A(BX) = AX = X$.

(8) Για το (α) θέστε $A = (a_{ij}) \in \mathbb{F}^{m\times n}$, $B = (b_{ij}) \in \mathbb{F}^{n\times p}$ και $C = (c_{ij}) \in \mathbb{F}^{p\times q}$. Παρατηρήστε ότι αν $d_{i\ell}$ είναι το στοιχείο (i, ℓ) του πίνακα $AB \in \mathbb{F}^{m\times p}$, τότε $d_{i\ell} = \sum_{1\le k\le n} a_{ik}\, b_{k\ell}$ και συνάγετε ότι το στοιχείο (i, j) του γινομένου $(AB)C = ABC$ είναι ίσο με το άθροισμα

$$\sum_{1\le \ell\le p} d_{i\ell}\, c_{\ell j} = \sum_{1\le k\le n,\, 1\le \ell\le p} a_{ik}\, b_{k\ell}\, c_{\ell j}.$$

Παρατηρήστε ότι στο ίδιο αποτέλεσμα φτάνει κανείς υπολογίζοντας το στοιχείο (i, j) του $A(BC)$. Για το (β) παρατηρήστε ότι υπάρχουν θετικοί ακέραιοι $n_0, n_1, \ldots, n_p$ τέτοιοι ώστε ο A_r να είναι πίνακας $n_{r-1} \times n_r$ για $1 \le r \le p$. Συμβολίζοντας με $a_{ij}^{(r)}$ το στοιχείο (i, j) του A_r, δείξτε με επαγωγή στο p ότι το στοιχείο (i, j) του $A_1 A_2 \cdots A_p$ είναι ίσο με

$$\sum a^{(1)}_{i_0 i_1} a^{(2)}_{i_1 i_2} \cdots a^{(p)}_{i_{p-1} i_p}$$

για $1 \le i \le n_0$ και $1 \le j \le n_p$, όπου το άθροισμα διατρέχει όλες τις ακολουθίες $(i_0, i_1, \ldots, i_p)$ με $i_0 = i$, $i_p = j$ και $i_r \in \{1, 2, \ldots, n_r\}$ για $1 \le r \le p - 1$. Παρατηρήστε ότι η περίπτωση $p = 1$ είναι τετριμμένη, ότι η περίπτωση $p = 2$ είναι ισοδύναμη με τον ορισμό του γινομένου $A_1 A_2$ των πινάκων A_1 και A_2 και ότι η $p = 3$ είναι ισοδύναμη με το ερώτημα (α).

(9) Έστω $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ και $AB = (c_{ij})$, οπότε $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$. Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις $a_{ij} = b_{ij} = 0$ για $i > j$, δείξτε ότι $c_{ij} = 0$ για $i > j$ και ότι $c_{ii} = a_{ii} b_{ii}$ για $1 \le i \le n$. Από αυτά συμπεράνετε ότι ισχύουν τα (α), (β) και (γ). Για το (δ) χρησιμοποιήστε το αποτέλεσμα στη λύση της Άσκησης 8 (β), ή δείξτε με επαγωγή στο $k \ge 1$ ότι το στοιχείο (i, j) του γινομένου $A_1 A_2 \cdots A_k$ είναι ίσο με μηδέν για όλους τους δείκτες i, j για τους οποίους $j \le i + k - 1$.

(10) Για το (β), δείξτε με επαγωγή στο m ότι

$$A^{m+1} = \begin{pmatrix} \binom{m}{m} & \binom{m+1}{m} & \binom{m+2}{m} & \cdots & \binom{m+n-1}{m} \\ 0 & \binom{m}{m} & \binom{m+1}{m} & \cdots & \binom{m+n-2}{m} \\ 0 & 0 & \binom{m}{m} & \cdots & \binom{m+n-3}{m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \binom{m}{m} \end{pmatrix},$$

όπου $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

(11) Για την τελευταία σχέση του (α) δείξτε ότι $\mathrm{tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ji}$, όπου $A = (a_{ij})$ και $B = (b_{ij})$, και συνάγετε το ζητούμενο. Για το (β), έστω E_{ij} ο $n \times n$ πίνακας το (i, j) στοιχείο του οποίου είναι ίσο με 1 και τα υπόλοιπα στοιχεία

του οποίου είναι ίσα με μηδέν, οπότε έχουμε

$$E_{ij}E_{k\ell} = \begin{cases} E_{i\ell}, & \text{αν } j = k, \\ O, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Παρατηρήστε ότι αν $A = (a_{ij})$, τότε $A = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}E_{ij}$ και επομένως $\varphi(A) = \sum_{i,j=1}^{n} \varphi(a_{ij}E_{ij}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\varphi(E_{ij})$. Θέτοντας $B = E_{k\ell}$ στην ισότητα $\varphi(AB) = \varphi(BA)$, με $1 \le k, \ell \le n$, δείξτε ότι $\varphi(E_{11}) = \varphi(E_{22}) = \cdots = \varphi(E_{nn})$ και ότι $\varphi(E_{ij}) = 0$ για δείκτες $i \neq j$ και συμπεράνετε το ζητούμενο.

(12) Για το (α), χρησιμοποιώντας τους σχετικούς ορισμούς και θέτοντας $A = (a_{ij})$, δείξτε ότι $\operatorname{tr}(A^tA) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2$ και συνάγετε ότι ισχύει το (β). Το (γ) συμβαίνει μόνο αν $A = B$. Πράγματι, χρησιμοποιώντας τη γραμμικότητα του ίχνους και την ιδιότητα $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$ (βλέπε Άσκηση 11) για $n \times n$ πινάκες A και B, η δοσμένη ισότητα γράφεται ισοδύναμα ως $\operatorname{tr}((A - B)(A - B)^T) = 0$. Από το (β) συμπεραίνουμε ότι $A - B = O$, δηλαδή ότι $A = B$.

(13) Για το (α) δείξτε πρώτα ότι ο A μπορεί να γραφεί στη μορφή $A = B^2 + cI$, με $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ και $c \in \mathbb{R}$. Αυτό προκύπτει από την Άσκηση 4 όταν ο A έχει θετικό ίχνος. Στη γενική περίπτωση γράψτε τον A ως άθροισμα ενός πίνακα με θετικό ίχνος και ενός πολλαπλασίου του ταυτοτικού πίνακα. Έπειτα, χρησιμοποιώντας την ίδια άσκηση, δείξτε ότι $cI = C^2$ για κάποιο $C \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Για το (β) συμβουλευτείτε την Άσκηση 64.

(14) Για το (α), πολλαπλασιάστε τη σχέση $AP = O$ από τα δεξιά με τον P^{-1} και εφαρμόστε την προσεταιριστική ιδιότητα για το γινόμενο πινάκων. Εργαστείτε ανάλογα για το (β). Για το (γ), παρατηρήστε ότι $(A - B)(A + B) = O$ και εφαρμόστε το (α).

(15) Για το (β) παρατηρήστε ότι $A(I - B) = I - B^2 = I$ και συμπεράνετε ότι $A^{-1} = I - B = 2I - A$. Για το (γ), εφαρμόζοντας το Διωνυμικό Θεώρημα (Άσκηση 5 (γ)), δείξτε ότι $A^n = (I + B)^n = I + nB = nA - (n - 1)I$.

(16) Η απάντηση είναι αρνητική και για τα δύο ερωτήματα. Για το (α) χρησιμοποιήστε τις ιδιότητες του ίχνους ενός τετραγωνικού πίνακα (Άσκηση 11). Για το (β) πράξτε ομοίως, παρατηρώντας ότι $ABC - B = I$ και ότι $\operatorname{tr}(ABC) = \operatorname{tr}(ACB) = \operatorname{tr}(B)$.

(17) Γράψτε $B = (b_{ij}) \in \mathbb{F}^{n\times n}$, υπολογίστε σε κάθε περίπτωση τους πίνακες AB και BA και βρείτε όλα τα b_{ij} για τα οποία ισχύει $AB = BA$. Απάντηση: Για τα (α) και (β), είναι όλοι οι πίνακες της μορφής

$$\begin{pmatrix} b_{11} & 0 & b_{13} & b_{14} \\ 0 & b_{22} & 0 & 0 \\ b_{31} & 0 & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & 0 & b_{43} & b_{44} \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & 0 & b_{14} \\ 0 & b & 0 & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & 0 & b_{44} \end{pmatrix},$$

αντίστοιχα, με $b_{ij}, b \in \mathbb{F}$. Για το (γ) είναι ακριβώς οι διαγώνιοι πίνακες. Για το (δ), είναι όλοι οι πίνακες της μορφής

$$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_n \\ 0 & c_1 & c_2 & \cdots & c_{n-1} \\ 0 & 0 & c_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & c_2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & c_1 \end{pmatrix}$$

με $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{F}$. Για το (ε), είναι όλοι οι πίνακες $B = (b_{ij}) \in \mathbb{F}^{n\times n}$ με $b_{11} = b_{nn}$, $b_{i1} = 0$ για $1 < i \le n$ και $b_{nj} = 0$ για $1 \le j < n$.

(18) Έστω E_{ij} οι $n \times n$ πίνακες που ορίσαμε στη λύση της Άσκησης 11. Έστω επίσης $A = (a_{ij}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}E_{ij}$. Για το (α) εφαρμόστε την ισότητα $AB = BA$ για $B = E_{kk}$ και $1 \le k \le n$ και εργαστείτε όπως στην Άσκηση 17 (με τους

ρόλους των A και B αντεστραμένους). Το (β) έπεται από το (γ). Για τα (γ) και (ε) εφαρμόστε την ισότητα $AB = BA$, αντίστοιχα, για $B = E_{k\ell}$ με $k \neq \ell$ και για $B = E_{k\ell}$ με $1 \leq k < \ell \leq n$. Οι λεπτομέρειες για το (γ) είναι οι εξής: Έχουμε $A = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}E_{ij}$ και επομένως $AE_{k\ell} = \sum_{i=1}^{n} a_{ik}E_{i\ell}$ και $E_{k\ell}A = \sum_{j=1}^{n} a_{\ell j}E_{kj}$. Από την ισότητα $AE_{k\ell} = E_{k\ell}A$ προκύπτει ότι $a_{ik} = a_{\ell j} = 0$ για $i \neq k$ και $j \neq \ell$, αντίστοιχα, και ότι $a_{kk} = a_{\ell\ell}$. Αφού αυτά ισχύουν για όλους τους δείκτες k, ℓ με $k \neq \ell$ συμπεραίνουμε ότι $A = \lambda I$, όπου $\lambda = a_{11} = \cdots = a_{nn}$. Απάντηση για το (ε): είναι όλοι οι πίνακες της μορφής $A = \lambda I + \mu e_{1n}$, όπου $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$. Για το (δ) παρατηρήστε ότι ο πίνακας $P = I + E_{k\ell}$ είναι αντιστρέψιμος για όλους τους δείκτες k, ℓ με $k \neq \ell$ και ότι από την ισότητα $AP = PA$ προκύπτει ότι $AE_{k\ell} = E_{k\ell}A$. Επομένως το συμπέρασμα προκύπτει όπως στο (γ).

(19) Ας υποθέσουμε πρώτα ότι $A^2 = \lambda I_n$ με $\lambda \neq 0$. Έστω ότι για τους πίνακες $X, Y, Z \in \mathbb{C}^{n\times n}$ έχουμε $X = Y + Z$ με $AY = YA$ και $AZ = -ZA$. Τότε $AX = AY + AZ$ και $XA = YA + ZA = AY - AZ$, οπότε $AY = (AX + XA)/2$ και $AZ = (AX - XA)/2$. Από τις ισότητες αυτές παίρνουμε

$$Y = \frac{X + A^{-1}XA}{2}, \qquad Z = \frac{X - A^{-1}XA}{2} \tag{1}$$

και συμπεραίνουμε ότι για δοσμένο $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$, οι πίνακες Y, Z όπως παραπάνω είναι μοναδικοί. Αντιστρόφως, για τυχαίο $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$, ορίζοντας τους Y, Z από τις (1) έχουμε, λόγω της υπόθεσης $A^2 = \lambda I_n$, ότι $AY = YA = (AX + XA)/2$ και $AZ = -ZA = (AX - XA)/2$ και, προφανώς, $Y + Z = X$. Έπεται ότι ο A είναι καλός. Υποθέτουμε τώρα ότι ο A είναι καλός και θεωρούμε $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Τότε, υπάρχουν $Y, Z \in \mathbb{C}^{n\times n}$ τέτοιοι ώστε $X = Y + Z$, $AY = YA$ και $AZ = -ZA$. Όπως προηγουμένως, βρίσκουμε ότι $AY = YA = (AX + XA)/2$. Πολλαπλασιάζοντας τις ισότητες $AY = (AX + XA)/2$ και $YA = (AX + XA)/2$ από αριστερά και από δεξιά, αντίστοιχα, με A και αφαιρώντας κατά μέλη βρίσκουμε ότι $A^2X = XA^2$. Αφού αυτό ισχύει για κάθε $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$, από την Άσκηση 18 (β) προκύπτει ότι $A^2 = \lambda I_n$ για κάποιο $\lambda \in \mathbb{C}$. Μένει να αποκλείσουμε την περίπτωση $\lambda = 0$. Πράγματι, έστω ότι $A^2 = O$. Τότε ο A μετατίθεται και αντιμετατίθεται, ταυτόχρονα, με τον εαυτό του και το μηδενικό πίνακα και συνεπώς οι παραστάσεις $A = A + O$ και $A = O + A$ δείχνουν ότι ο A δεν είναι καλός, σε αντίθεση με την υπόθεσή μας, εκτός αν $A = O$, περίπτωση που επίσης αποκλείεται για προφανείς λόγους.

(20) Για το (α) παρατηρήστε ότι $(P^tAP)^t = P^tA^t(P^t)^t = P^tA^tP$. Για το (β) θυμηθείτε πρώτα ότι αν ένας τετραγωνικός πίνακας P είναι αντιστρέψιμος, τότε ο P^t είναι επίσης αντιστρέψιμος με αντίστροφο $(P^{-1})^t$. Γράψτε έπειτα την ισότητα $P^tAP = B$ ως $A = Q^tBQ$, όπου $Q = P^{-1}$, και εφαρμόστε το (α).

(21) Στα (α) και (δ) η πρόταση ισχύει για όλα τα n, ενώ στα (β) και (γ) ισχύει μόνο για $n = 1$. Για το (α) δείξτε γενικότερα ότι για συμμετρικούς πινακες A, B, ο AB είναι συμμετρικός αν και μόνο αν $AB = BA$. Για τα (β) και (γ) βρείτε π.χ. μη συμμετρικό πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ με $A^2 = I$, όπου $n \geq 2$. Για το (δ), θέτοντας $B = O$ και $B = I$, προκύπτει ότι οι πίνακες $C = A^2$ και $D = (A + I)^2$ είναι συμμετρικοί. Από αυτό συμπεράνετε ότι ο $A = (D - C - I)/2$ είναι επίσης συμμετρικός.

(22) Για το (α), θυμηθείτε ότι το γινόμενο αντιστρέψιμων πινάκων είναι αντιστρέψιμος πίνακας ή χρησιμοποιήστε την Άσκηση 14. Για το (β), εφαρμόστε την ταυτότητα $I - X^m = (I - X)(I + X + X^2 + \cdots + X^{m-1})$. Για το (γ), συνάγετε από την Άσκηση 9 (δ) ότι $A^n = O$, όπου n είναι η διάσταση του A. Για το (δ), δείξτε ότι $(A + B)^{2m} = O$, αν $A^m = B^m = O$. Για το (ε) δοκιμάστε τους πίνακες $A = E_{12}$ και $B = E_{21}$ (όπου ο E_{ij} είναι όπως στη λύση της Άσκησης 11). Για το (στ), δείξτε πρώτα ότι για τυχαίο 2×2 μηδενοδύναμο πίνακα A ισχύει $A^2 = O$ (μια γενικότερη πρόταση θα δειχθεί στην Άσκηση 152 (δ) και

την Άσκηση 197). Επομένως οι 2×2 μηδενοδύναμοι πίνακες είναι αυτοί που βρήκαμε στη λύση της Άσκησης 4 (β). Η απάντηση στο (ζ) είναι αρνητική. Δοκιμάστε τους πίνακες $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ και $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(23) Έστω $A = (a_{ij})$ και έστω $B = (b_{ij})$ ο αντίστροφος πίνακας του A. Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις $\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = 0$ για $i \neq j$, δείξτε ότι δεν υπάρχει γραμμή (ή στήλη) του A με περισσότερα του ενός μη μηδενικά στοιχεία. Συνάγετε ότι οι πίνακες με τις δοσμένες ιδιότητες είναι αυτοί που μπορούν να προκύψουν από διαγώνιο πίνακα $\Delta \in \mathbb{R}^{n \times n}$ που έχει θετικούς αριθμούς ως στοιχεία στην κύρια διαγώνιο με μετάθεση των γραμμών (ή στηλών) του Δ. Για $n = 2$, αυτοί είναι οι πίνακες της μορφής $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ και $\begin{pmatrix} 0 & b \\ a & 0 \end{pmatrix}$ με $a, b > 0$.

(24) Αν X είναι ο αντίστροφος του $I_m - AB$, οπότε $X - ABX = X - XAB = I_m$, δείξτε ότι ο $BXA + I_n$ είναι ο αντίστροφος του $I_n - BA$.

(25) Για το (α) χρησιμοποιήστε τις ιδιότητες του ίχνους του μέρους (α) της Άσκησης 11. Για το (β) παρατηρήστε γενικότερα ότι για $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ με $i \neq j$ έχουμε $E_{ij} = E_{ii}E_{ij} - E_{ij}E_{ii}$ και $E_{ii} - E_{jj} = E_{ij}E_{ji} - E_{ji}E_{ij}$ και συνεπώς ότι $E_{ij}, E_{ii} - E_{jj} \in \mathcal{K}_n(\mathbb{F})$. Συνάγετε ότι ισχύει και το (γ) αφού κάθε πίνακας $A = (a_{ij}) \in \mathbb{F}^{n \times n}$ ίχνους μηδέν γράφεται ως το άθροισμα των πινάκων $a_{ij}E_{ij}$ για $i \neq j$ και των $a_{ii}(E_{ii} - E_{nn})$ για $1 \leq i \leq n - 1$.

(26) Αφαιρέστε την πρώτη γραμμή από τις υπόλοιπες και συνεχίστε με κατάλληλους στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών. Απάντηση:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

(27) Απάντηση για το (α): $x_1 = x_4 = x_7 = \cdots = x_{100} = \lambda$, $x_2 = x_5 = x_7 = \cdots = x_{98} = \mu$ και $x_3 = x_6 = x_9 = \cdots = x_{99} = 1 - \lambda - \mu$, όπου τα $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$ παίρνουν αυθαίρετες τιμές. Απάντηση για το (β): $x_1 = x_7 = x_{13} = \cdots = x_{97} = \lambda$, $x_2 = x_8 = x_{14} = \cdots = x_{98} = \mu$, $x_3 = x_9 = x_{15} = \cdots = x_{99} = \nu$, $x_4 = x_{10} = x_{16} = \cdots = x_{100} = \rho$, $x_5 = x_{11} = x_{17} = \cdots = x_{95} = 1 - \lambda - \nu$ και $x_6 = x_{12} = x_{18} = \cdots = x_{96} = 1 - \mu - \rho$, όπου τα $\lambda, \mu, \nu, \rho \in \mathbb{F}$ παίρνουν αυθαίρετες τιμές.

(28) Το (α) έχει απειρία λύσεων για $\lambda \in \{-1, 1\}$ και μοναδική λύση (ποια;) διαφορετικά. Για το (β) εργαστείτε με τον επαυξημένο πίνακα, π.χ. ανταλλάσσοντας πρώτα την πρώτη με την τρίτη γραμμή. Δείξτε ότι το σύστημα έχει απειρία λύσεων για $\lambda = 1$ (προφανές), ότι είναι αδύνατο για $\lambda = -2$ και ότι έχει τη μοναδική λύση $x_1 = -(\lambda + 1)/(\lambda + 2)$, $x_2 = 1/(\lambda + 2)$ και $x_3 = (\lambda + 1)^2/(\lambda + 2)$ σε κάθε άλλη περίπτωση. Για το (γ), πρώτα προσθέστε στην πρώτη γραμμή του επαυξημένου πίνακα όλες τις υπόλοιπες γραμμές, διαιρέστε την πρώτη γραμμή με $\lambda + n - 1$ και συνεχίστε την απαλοιφή του Gauss κατά τα γνωστά. Το σύστημα έχει απειρία λύσεων για $\lambda = 1$ (προφανές), είναι αδύνατο για $\lambda = -n + 1$ και έχει μοναδική λύση για τις υπόλοιπες τιμές του λ, την οποία μπορείτε να υπολογίσετε.

(29) Αφού ο A δεν είναι αντιστρέψιμος, υπάρχει μη μηδενικό διάνυσμα $x \in \mathbb{R}^n$ με $Ax = 0$. Για το (α), δείξτε ότι ο $n \times p$ πίνακας B κάθε στήλη του οποίου είναι ίση με x έχει τις ζητούμενες ιδιότητες. Για το (β), εργαστείτε ανάλογα ή εφαρμόστε το (α) στον ανάστροφο πίνακα του A.

(30) Γνωστό από τη θεωρία. Θεωρήστε την ανηγμένη κλιμακωτή μορφή A' του A, δείξτε τα (α) και (β) για το ομογενές γραμμικό σύσυημα $A'x = 0$ και θυμηθείτε ότι τα συστήματα $Ax = 0$ και $A'x = 0$ έχουν το ίδιο σύνολο λύσεων.

(31) Για το (α), πολλαπλασιάστε την ισότητα $Bx = 0$ από αριστερά με τον πίνακα A. Το (β) προκύπτει από το (α). Για το (γ), συνάγετε από το (α) ότι ο πίνακας B είναι αντιστρέψιμος και δείξτε ότι $B^{-1} = A$.

(32) Υποθέστε ότι ισχύει το (i) και ότι ξ και ξ_0 είναι δύο λύσεις του συστήματος $Ax = b$. Παρατηρήστε ότι $A(\xi - \xi_0) = 0$ και συμπεράνετε ότι $\xi = \xi_0$ και επομένως ότι ισχύει το (ii). Το αντίστροφο είναι φανερό.

(33) Για τη συνεπαγωγή (iii) $\Rightarrow$ (i), υποθέστε ότι το σύστημα $Ax = b$ έχει μοναδική λύση για κάποιο $b \in \mathbb{F}^n$, δείξτε ότι το ίδιο ισχύει για το ομογενές σύστημα $Ax = 0$ και συμπεράνετε ότι ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος. Για την (iv) $\Rightarrow$ (i), θεωρήστε μια λύση $\xi_i \in \mathbb{F}^n$ του συστήματος $Ax = e_i$, όπου $e_i \in \mathbb{F}^n$ είναι η i-στήλη του I_n, δείξτε ότι για τον πίνακα $B \in \mathbb{F}^{n\times n}$ με στήλες $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ ισχύει $AB = I_n$ και συνάγετε από την Άσκηση 31 ότι ο A είναι αντιστρέψιμος. Οι συνεπαγωγές (i) $\Rightarrow$ (ii), (ii) $\Rightarrow$ (iii) και (ii) $\Rightarrow$ (iv) είναι γνωστές ή τετριμμένες.

(34) Θεωρήστε την ανηγμένη κλιμακωτή μορφή $(A' \mid b')$ του επαυξημένου πίνακα $(A \mid b)$ του συστήματος. Παρατηρήστε ότι $A' \in \mathbb{Q}^{m\times 1}$ και $b' \in \mathbb{Q}^m$ και ότι η ισυδυναμία $Ax = b \Leftrightarrow A'x = b'$ ισχύει και για την περίπτωση $x \in \mathbb{C}^n$ και για την $x \in \mathbb{Q}^n$. Αφού το $Ax = b$ έχει λύση πάνω στο $\mathbb{C}$, συμπεράνετε ότι το πλήθος των μη μηδενικών γραμμών του A' είναι ίσο με εκείνο του $(A' \mid b')$. Από το τελευταίο συμπεράνετε ότι το $A'x = b'$ έχει λύση πάνω στο $\mathbb{Q}$ και επομένως ότι το ίδιο ισχύει για το $Ax = b$.

(35) Έστω $S = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Θεωρούμε το ομογενές σύστημα των n γραμμικών εξισώσεων

$$\sum_{r\in\{1,\dots,n+1\}:\ a_k\in A_r} x_r \;=\; 0, \qquad\qquad 1 \le k \le n$$

σε $n+1$ αγνώστους $x_1, x_2, \dots, x_{n+1} \in \mathbb{R}$. Σύμφωνα με την Άσκηση 30, ένα τέτοιο σύστημα έχει μη μηδενική λύση $(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$. Έστω $I = \{i : x_i > 0\}$ και $J = \{j : x_j < 0\}$ και έστω $y_j = -x_j$ για $j \in J$. Προφανώς τα I και J είναι μη κενά, ξένα μεταξύ τους υποσύνολα του συνόλου $\{1, 2, \dots, n+1\}$ και για κάθε $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ ισχύει

$$\sum_{i\in I:\ a_k\in A_i} x_i \;=\; \sum_{j\in J:\ a_k\in A_j} y_j.$$

Από την ισότητα αυτή έπεται ότι $a_k \in \cup_{i\in I} A_i$ αν και μόνο αν $a_k \in \cup_{j\in J} A_j$ για κάθε k, οπότε $\cup_{i\in I} A_i = \cup_{j\in J} A_j$.

(36) Εργαστείτε με τους επαυξημένους πίνακες $(A_n \mid I_n)$ και $(B_n \mid I_n)$. Για το (α), αφαιρώντας λ φορές τη δεύτερη γραμμή από την πρώτη, λ φορές την τρίτη από τη δεύτερη και ούτω καθεξής, δείξτε ότι

$$A_n^{-1} \;=\; \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & -\lambda \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Για το (β), προσθέστε πρώτα στην πρώτη γραμμή όλες τις υπόλοιπες γραμμές. Απάντηση:

$$B_n^{-1} = \frac{1}{n-1}\begin{pmatrix} -(n-2) & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & -(n-2) & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & -(n-2) \end{pmatrix}.$$

(37) Εργαζόμενοι με τον επαυξημένο πίνακα $(A_n \mid I_n)$, πολλαπλασιάστε την τελευταία γραμμή με $1/n$ και με διαδοχικές αλλαγές γραμμών, μεταφέρετέ την πάνω από την πρώτη γραμμή. Ακολούθως, αφαιρέστε i φορές την πρώτη γραμμή από τη γραμμή $i+1$ για $1 \le i \le n-1$. Αφαιρέστε τη γραμμή $i+1$ από τη γραμμή i για $i = 2, \dots, n-1$ και στη συνέχεια αφαιρέστε τη γραμμή $i+1$ από τη γραμμή i για $i = 1, 2, \dots, n-1$. Απάντηση:

$$A_n^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -\frac{n-1}{n} \end{pmatrix}.$$

(38) Εργαστείτε με τον επαυξημένο πίνακα $(A_n \mid I_n)$. Αφαιρώντας τη δεύτερη γραμμή από την πρώτη, την τρίτη από τη δεύτερη και ούτω καθεξής και έπειτα προσθέτοντας στην τελευταία γραμμή του πίνακα που προέκυψε το άθροισμα των γραμμών $2i-1$ για $1 \le i \le n/2$, δείξτε ότι ο πίνακας A_n είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν ο n είναι άρτιος ακέραιος. Συνεχίζοντας με κατάλληλους στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών, δείξτε ότι

$$A_n^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & \cdots & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & \cdots & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & 1 & -1 & \cdots & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

για κάθε άρτιο n.

(39) Για το (α), δείξτε γενικότερα ότι αν ο πίνακας $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ έχει την ιδιότητα

$$|a_{ii}| > \sum_{j\neq i} |a_{ij}|$$

για $1 \le i \le n$, τότε το ομογενές γραμμικό σύστημα $Ax = O$ έχει μόνο την τετριμμένη λύση, ως εξής: Υποθέστε το αντίθετο και θεωρήστε ένα μη μηδενικό διάνυσμα $x = (x_1 \cdots x_n)^t \in \mathbb{C}^n$ με $Ax = O$. Επιλέξτε δείκτη $1 \le i \le n$ για τον οποίο το μέτρο του x_i είναι μέγιστο και χρησιμοποιήστε την ισότητα $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = 0$ για να καταλήξετε σε άτοπο. Για το (β) παρατηρήστε ότι αν κάθε στοιχείο της κύριας διαγωνίου του A είναι ίσο με $n-1$ και κάθε άλλο στοιχείο του A είναι ίσο με -1, τότε ισχύει $Ax = O$ για $x = (1\ 1\ \cdots\ 1)^t$ και επομένως ο A δεν είναι αντιστρέψιμος.

(40) Χρησιμοποιώντας τη δοσμένη ισότητα, δείξτε ότι το ομογενές γραμμικό σύστημα $Bx = 0$ έχει μόνο την τετριμμένη λύση $x = 0$.

(41) Για το (α) παρατηρήστε ότι $(A+I)x = -Bx$ και εφαρμόστε επαγωγή στο k, χρησιμοποιώντας τη σχέση $(A+I)B = B(A+I)$. Για το (β) αρκεί να δείξει κανείς ότι αν $Px = 0$ για κάποιο $x \in \mathbb{C}^n$, τότε $x = 0$. Υποθέτοντας

ότι $Px = 0$, συνάγετε από το (α) ότι $(A + I)^{m+1} x = -x$ και ότι $A^m x = x$. Έπειτα δείξτε ότι τα πολυώνυμα $p(z) = (z + 1)^{2011} + 1$ και $q(z) = z^{2010} - 1$ δεν έχουν κοινή ρίζα στο $\mathbb{C}$ (παρατηρήστε ότι αν $z \in \mathbb{C}$ είναι κοινή ρίζα, τότε $|z| = |z + 1| = 1$, συμπεράνετε ότι το z είναι τρίτη ρίζα της μονάδος και καταλήξτε σε άτοπο). Συνάγετε ότι υπάρχουν πολυώνυμα $a(z), b(z) \in \mathbb{C}[z]$ με $a(z)p(z) + b(z)q(z) = 1$ και συμπεράνετε από τα παραπάνω ότι $x = 0$. Για το (γ) βρείτε αντιπαράδειγμα π.χ. με $n = m = 2$ και

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \zeta_1 & 0 \\ 0 & \zeta_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

για κατάλληλη τιμή του a, όπου ζ_1 και ζ_2 είναι οι μη πραγματικές τρίτες ρίζες της μονάδος.

(42) Για το (α), γράψτε τη δοσμένη ισότητα ως $(A - I)(B - I) = I$ και χρησιμοποιήστε την Άσκηση 31 (γ). Εργαστείτε ομοίως για το (β), γράφοντας τη δοσμένη ισότητα ως $(P^{-1} - B)(A + P) = I$. Η απάντηση στο (γ) είναι θετική. Η ακόλουθη κομψή λύση δόθηκε από τον Ηλία Ζαδίκ (δευτεροετή φοιτητή του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Αθηνών τον Οκτώβριο του 2010). Η δοσμένη ισότητα γράφεται ως $(I - PB)A = PBP$. Πολλαπλασιάζοντας από δεξιά με τον B προκύπτει ότι $(I - PB)AB = (PB)^2$. Παίρνοντας τους ανάστροφους πίνακες στην τελευταία ισότητα και χρησιμοποιώντας την Άσκηση 40 προκύπτει ότι ο πίνακας $I - PB$ είναι αντιστρέψιμος. Ο αντίστροφος του πίνακα αυτού μετατίθεται με τον $I - PB$ και συνεπώς με τον PB. Επομένως, από τη σχέση $A = (I - PB)^{-1}PBP$ έπεται ότι $ABP = (I - PB)^{-1}PBPBP = PB(I - PB)^{-1}PBP = PBA$.

(43) Απάντηση: -1.

(44) Για το (α) παρατηρήστε ότι για $abc \neq 0$ ισχύει

$$\det\begin{pmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ac \\ 1 & c & ab \end{pmatrix} = abc \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & a & 1/a \\ 1 & b & 1/b \\ 1 & c & 1/c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a^2 & 1 \\ b & b^2 & 1 \\ c & c^2 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \det\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix}$$

και χρησιμοποιήστε τη γραμμικότητα της ορίζουσας ως προς την τελευταία στήλη. Εργαστείτε παρόμοια για το (β).

(45) Για το (α) προσθέστε την πρώτη γραμμή του δοσμένου πίνακα σε καθεμία από τις υπόλοιπες και συνάγετε ότι ορίζουσα του πίνακα αυτού είναι ίση με 2^{n-1}. Για το (β) προσθέστε στην πρώτη στήλη όλες τις στήλες εκτός της πρώτης και αναπτύξτε την ορίζουσα που προκύπτει κατά τα στοιχεία της πρώτης στήλης. Απάντηση: $n!$.

(46) Για το (α), αναπτύξτε τη δοσμένη ορίζουσα κατά τα στοιχεία της πρώτης στήλης. Για το (β), χρησιμοποιήστε το (α) και επαγωγή στο n για να δείξετε ότι $c_n = \alpha^n + \alpha^{n-1}\beta + \cdots + \beta^n$.

(47) Για το (β) παρατηρήστε ότι $\det(A_n) = n\det(B_n)$, όπου ο B_n προκύπτει από τον A_n πολλαπλασιάζοντας την τελευταία γραμμή με $1/n$. Στη συνέχεια αφαιρέστε i φορές την τελευταία γραμμή του B_n από τη γραμμή i για $1 \leq i \leq n - 1$. Απάντηση: $\det(A_n) = (-1)^{n+1}n$. Για τα (γ) και (δ) χρησιμοποιήστε τη σχέση που συνδέει τον προσαρτημένο πίνακα με τον αντίστροφο και την Άσκηση 37 (β).

(48) Από την ταυτότητα $A \cdot adj(A) = \det(A) \cdot I_n$ και γνωστές ιδιότητες των οριζουσών συνάγετε ότι $\det(A) \cdot \det(adj(A)) = (\det(A))^n$. Συμπεράνετε το ζητούμενο παρατηρώντας ότι η ορίζουσα ενός τετραγωνικού πίνακα B είναι μη μηδενικό

πολυώνυμο στα στοιχεία του B με ακέραιους συντελεστές και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι για πολυώνυμα p και q με ακέραιους συντελεστές ισχύει $pq = 0 \Rightarrow p = 0$ ή $q = 0$.

(49) Χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα Laplace παρατηρήστε ότι η ορίζουσα του πίνακα που προκύπτει αντικαθιστώντας την i γραμμή του A με τη γραμμή $(1\ 1\ \cdots 1)$ είναι ίση με $\sum_{j=1}^{n} c_{ij}$, όπου c_{ij} είναι ο (i, j)-συμπαράγοντας του A. Εφαρμόστε έπειτα το γνωστό τύπο για τον αντίστροφο πίνακα, σύμφωνα με τον οποίο το (i, j) στοιχείο του A^{-1} είναι ίσο με $c_{ji}/\det(A)$.

(50) Για το (α) εφαρμόστε επαγωγή στο n, αναπτύσσοντας τις ορίζουσες των A, B κατά τα στοιχεία της πρώτης στήλης. Για το (β) εφαρμόστε το (α) για $m = 3$ και παρατηρήστε ότι

$$\det(A) \equiv \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 8 \equiv -1 \pmod 3$$

για να συμπεράνετε ότι $\det(A) \neq 0$.

(51) Θα δείξουμε ότι η μέγιστη αυτή τιμή ισούται με $n^2 - n + 1$. Πράγματι, για τον $n \times n$ πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

έχουμε $f(A) = n^2 - n + 1$ και, αφαιρώντας την πρώτη γραμμή από καθεμιά από τις υπόλοιπες, βρίσκουμε ότι $\det(A) = (-1)^{n-1}$. Ας υποθέσουμε ότι $A \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ και ότι $f(A) > n^2 - n + 1$. Τότε, το πολύ $n - 2$ στοιχεία του A είναι άρτιοι αριθμοί και συνεπώς υπάρχουν δύο γραμμές του A οι οποίες αποτελούνται μόνο από περιττούς αριθμούς. Αφαιρούμε τη μία από τις δύο αυτές γραμμές από την άλλη και βρίσκουμε ότι $\det(A) \in 2\mathbb{Z}$.

(52) Για το (α) παρατηρήστε ότι η ορίζουσα του A είναι ομογενές πολυώνυμο βαθμού $n(n-1)/2$ στις μεταβλητές $a_1, a_2, \ldots, a_n$, το οποίο μηδενίζεται αν $a_i = a_j$ και συνεπώς διαιρείται με τη διαφορά $a_j - a_i$ για $1 \leq i < j \leq n$, άρα και με το γινόμενο $\prod_{1\leq i<j\leq n}(a_j - a_i)$. Η ορίζουσα του A είναι η γνωστή ορίζουσα Vandermonde. Χρησιμοποιήστε παρόμοιο σκεπτικό για το (γ). Για το (β) εφαρμόστε την Άσκηση 49.

(53) Θεωρείσε τη δοσμένη ορίζουσα ως πολυώνυμο στις μεταβλητές $x_1, x_2, \ldots, x_n$ και εργαστείτε όπως στη λύση της Άσκησης 52 για να δείξετε ότι είναι ίση με $\prod_{1\leq i<j\leq n}(x_j - x_i)$, άρα ανεξάρτητη των $y_1, \ldots, y_{n-1}$.

(54) Το (α) είναι εύκολο. Δείξτε ότι το $f(t)$ είναι πολυώνυμο στο t βαθμού μικρότερου ή ίσου του 1 και συνάγετε το (β) με χρήση του (α).

(55) Παρατηρήστε ότι

$$A(n, k) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = A(n+1, k)$$

και συνάγετε με επαγωγή στο n ότι $\det A(n, k) = 1$ για όλα τα n και k.

(56) Για το (α) χρησιμοποιήστε την πολυγραμμικότητα της ορίζουσας ενός πίνακα ως προς τις στήλες του. Για το (β) εφαρμόστε κατάλληλα το (α) και για το (γ)

εφαρμόστε κατάλληλα το (β). Απάντηση για το (β): $x_1 x_2 \cdots x_n(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i b_i}{x_i})$. Απάντηση για το (γ): $1+\log 2$.

(57) Για το (α), ας υποθέσουμε ότι το ομογενές γραμμικό σύστημα $A_n \cdot x = 0$ έχει μια μη μηδενική λύση $x = (\lambda_1\ \lambda_2\ \cdots\ \lambda_n)^t \in \mathbb{R}^n$. Τότε, θέτοντας

$$f(x) \ := \ \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{x+i},$$

έχουμε $f(0) = f(1) = \cdots = f(n-1) = 0$. Θέτουμε

$$p(x) \ := \ (x+1)(x+2)\cdots(x+n) \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{x+i}$$

και παρατηρούμε ότι το $p(x)$ είναι μη μηδενικό πολυώνυμο βαθμού μικρότερου του n με n διακεκριμένες ρίζες, τις $0,1,\ldots,n-1$. Αυτή η αντίφαση δείχνει ότι το σύστημα $A_n \cdot x = 0$ έχει μόνο τη μηδενική λύση ή, ισοδύναμα, ότι ο πίνακας A_n είναι αντιστρέψιμος. Μια γενίκευση του (α) δίνεται στην Άσκηση 92. Για τα (β) και (γ) ακολουθούμε παρόμοιο σκεπτικό. Τα στοιχεία, έστω $c_{ij}(n)$, του αντίστροφου πίνακα του A_n ορίζονται από το σύστημα των εξισώσεων

$$\sum_{k=1}^{n} c_{kj}(n)/(i+k-1) \ = \ \begin{cases} 1, & \text{αν } i = j, \\ 0, & \text{αν } i \neq j \end{cases}$$

για $1 \le i, j \le n$. Θεωρούμε το $j \in \{1,2,\ldots,n\}$ σταθερό και ορίζουμε τις συναρτήσεις $f_j(x)$ και $p_j(x)$ από τους τύπους

$$f_j(x) \ = \ \sum_{k=1}^{n} c_{kj}(n)/(x+k-1)$$

και $p_j(x) = x(x+1)\cdots(x+n-1)f_j(x)$. Οι παραπάνω εξισώσεις για τα $c_{ij}(n)$ γράφονται, ισοδύναμα, ως

$$f_j(i) \ = \ \begin{cases} 1, & \text{αν } i = j, \\ 0, & \text{αν } i \neq j \end{cases}$$

για $1 \le i \le n$, ή ως

$$p_j(i) \ = \ \begin{cases} \dfrac{(n+j-1)!}{(j-1)!}, & \text{αν } i = j, \\ 0, & \text{αν } i \neq j \end{cases}$$

για $1 \le i \le n$. Ως πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού μικρότερου του n, η $p_j(x)$ υπολογίζεται εύκολα από τα παραπάνω δεδομένα ως

$$p_j(x) \ = \ \frac{(-1)^{n-j}\,(n+j-1)!}{((j-1)!)^2\,(n-j)!} \prod_{i\neq j}(x-i).$$

Κατά συνέπεια,

$$\sum_{k=1}^{n} c_{kj}(n)/(x+k-1) \ = \ \frac{1}{x(x+1)\cdots(x+n-1)} \cdot \frac{(-1)^{n-j}\,(n+j-1)!}{((j-1)!)^2\,(n-j)!} \prod_{i\neq j}(x-i)$$

για $1 \le j \le n$. Πολλαπλασιάζοντας την ισότητα αυτή με $x+i-1$ και θέτοντας $x = -i+1$ προκύπτει ο τύπος

$$c_{ij}(n) \ = \ \frac{(-1)^{i+j}}{i+j-1} \cdot \frac{(n+j-1)!\,(n+j-1)!}{((i-1)!)^2((j-1)!)^2\,(n-i)!(n-j)!}$$

για $1 \le i, j \le n$. Από τον τύπο αυτόν προκύπτουν άμεσα τα ζητούμενα στο (β). Για το (γ) παρατηρούμε ότι ο (n, n)-συμπαράγοντας του A_n ισούται με $\det(A_{n-1})$, οπότε $c_{nn}(n) = \det(A_{n-1})/\det(A_n)$ και συνεπώς

$$\det(A_n) = \left(\prod_{k=2}^{n} c_{kk}(k)\right)^{-1} = \left(\prod_{k=1}^{n} (2k-1)\binom{2k-2}{k-1}^2\right)^{-1}$$

για κάθε n.

(58) Απάντηση για το (α): $-1/12$ και $-1/8640$ για $n = 2$ και $n = 3$, αντίστοιχα. Για τη γενική περίπτωση, δείξτε ότι η ορίζουσα του πίνακα στο δεξιό μέλος της ισότητας στο (β) είναι ίση με $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$ εφαρμόζοντας στοιχειώδεις πράξεις γραμμών για να μετατρέψετε τον πίνακα αυτό σε έναν πίνακα τα στοιχεία του οποίου είναι ίσα με μηδέν κάτω από τη δευτερεύουσα διαγώνιο και με ένα πάνω σε αυτή.

(59) Για το (α) εργαστείτε με στοιχειώδεις πράξεις στις στήλες του δοσμένου πίνακα ή με άλλο παρόμοιο τρόπο. Για το (β), να θέσετε $n = 12$ στο (α) και να βρείτε $a_0, a_1, \ldots, a_{11} \in \{0, 1\}$ ώστε $a_0 + a_1 + 2a_2 + 2^2 a_3 + \cdots + 2^{10} a_{11} = 2010$.

(60) Για το (α) παρατηρήστε ότι εκτελώντας στοιχειώδεις πράξεις σε γραμμές και στήλες, ο πίνακας B μπορεί να μετατραπεί σε διαγώνιο πίνακα, έστω με διαγώνια στοιχεία $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, ώστε $\det(B) = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_m$. Έπειτα παρατηρήστε ότι οι αντίστοιχες πράξεις σε γραμμές και στήλες του διαμερισμένου πίνακα, την ορίζουσα του οποίου θέλουμε να υπολογίσουμε, φέρνουν τον πίνακα αυτό στη μορφή

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 A & O & \cdots & O \\ O & \lambda_2 A & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ O & O & \cdots & \lambda_m A \end{pmatrix}$$

και ότι η ορίζουσα του τελευταίου πίνακα είναι ίση με $(\det(A))^m \lambda_1^n \lambda_2^n \cdots \lambda_m^n$. Μια διαφορετική λύση δίνεται στην Άσκηση 146. Για το (β) εφαρμόστε το (α) σε κατάλληλους $m \times m$ πίνακες A και B.

(61) Για την πρώτη προτεινόμενη ισότητα, πολλαπλασιάστε την πρώτη στήλη με ζ^j, τη δεύτερη στήλη με ζ^{2j} κλπ και προσθέστε όλες τις στήλες για να συμπεράνετε ότι η ορίζουσα είναι ίση με μηδέν αν $\sum_{k=1}^{n} \zeta^{jk} a_k = 0$. Για τη δεύτερη προτεινόμενη ισότητα, να θέσετε $a_i = i$ στην πρώτη και να χρησιμοποιήστε (αφού αποδείξετε) την ισότητα

$$\sum_{k=1}^{n} kx^k = \begin{cases} \dfrac{n(n+1)}{2}, & \text{αν } x = 1, \\[2ex] \dfrac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x}{(x-1)^2}, & \text{διαφορετικά,} \end{cases}$$

καθώς και τις

$$\prod_{j=1}^{n-1} \zeta^j = (-1)^{n-1}, \qquad \prod_{j=1}^{n-1} (\zeta^j - 1) = (-1)^{n-1} n.$$

(62) Για το (α) βρείτε 2×2 πίνακα το τετράγωνο του οποίου είναι ίσο με $-I$ και από αυτόν κατασκευάστε $n \times n$ πίνακα A με $A^2 = -I$ για τυχαίο άρτιο θετικό ακέραιο n. Επίσης, παίρνοντας ορίζουσες στην ισότητα $A^2 = -I$, δείξτε ότι η απάντηση είναι αρνητική όταν ο n είναι περιττός. Για το (β) χρησιμοποιήστε τη λύση του (α), όταν ο n είναι άρτιος, και δείξτε ότι δεν υπάρχουν τέτοιοι πίνακες όταν ο n είναι περιττός, εξισώνοντας τις ορίζουσες στα δύο μέλη της ισότητας $A^2 = -B^2$.

(63) Εξισώνοντας τις ορίζουσες στην επιθυμητή ισότητα, δείξτε πρώτα ότι $q^2 = a(a+1)^2$, όπου $q = \det(X) \in \mathbb{Q}$, και συμπεράνετε ότι το $a \in \mathbb{Z}$ θα πρέπει να είναι τέλειο τετράγωνο, δηλαδή $a = b^2$ για κάποιο $b \in \mathbb{Z}$. Αντιστρόφως, αν $a = b^2$ με $b \in \mathbb{Z}$, δείξτε ότι ο

$$X = \begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 1 & -b \end{pmatrix}$$

έχει τις επιθυμητές ιδιότητες.

(64) Για το (α) παρατηρούμε ότι $A^2 + B^2 = (A + \mathrm{i}B)(A - \mathrm{i}B)$ και συμπεραίνουμε ότι $\det(A^2 + B^2) = \det(A + \mathrm{i}B)\det(A - \mathrm{i}B) = z\bar{z} = |z|^2 \ge 0$, όπου $z = \det(A + \mathrm{i}B)$. Για το (β) μπορεί να θέσει κανείς

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(65) Χρησιμοποιώντας τη θεωρία των θετικά ορισμένων συμμετρικών πινάκων μπορεί κανείς να δείξει ότι το συμπέρασμα ισχύει γενικά για $n \times n$ πίνακες. Μια στοιχειώδη απόδειξη για 2×2 πίνακες είναι η εξής. Παρατηρούμε πρώτα (εξηγήστε πώς) ότι το τετράγωνο κάθε αντιστρέψιμου συμμετρικού 2×2 πίνακα έχει θετικά στοιχεία στην κύρια διαγώνιο και θετική ορίζουσα. Μπορούμε επομένως να γράψουμε

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}, \quad B^2 = \begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix}$$

όπου a, c, x, z είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί με $ac > b^2$ και $xz > y^2$. Τότε $\det(A^2 + B^2) = (a + x)(c + z) - (b + y)^2$ και

$$\begin{aligned} (b+y)^2 &= b^2 + y^2 + 2by \ < \ ac + xz + 2\sqrt{acxz} \\ &\le ac + xz + az + cx \ = \ (a+x)(c+z), \end{aligned}$$

οπότε $\det(A^2 + B^2) > 0$.

(66) Εφαρμόζουμε την υπόθεση για τον πίνακα $B = kI_2$ με $k \in \mathbb{Z}$, ο οποίος μετατίθεται με τον A. Με απευθείας υπολογισμό, ή λαμβάνοντας υπόψη ότι $\det(A^2 + B^2) = |\det(A + \mathrm{i}B)|^2$, βρίσκουμε ότι

$$\det(A^2 + B^2) = k^4 + \Big((\mathrm{tr}(A))^2 - 2\det(A)\Big)k^2 + (\det(A))^2$$

και συνεπώς ότι

$$4\det(A^2 + B^2) = \Big(2k^2 + (\mathrm{tr}(A))^2 - 2\det(A)\Big)^2 + (\mathrm{tr}(A))^2\Big(4\det(A) - (\mathrm{tr}(A))^2\Big).$$

Για να είναι αυτή η παράσταση τετράγωνο ακεραίου για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ θα πρέπει $4\det(A) - (\mathrm{tr}(A))^2 = 0$, αφού κάθε μη μηδενικός ακέραιος m μπορεί να γραφεί στη μορφή $m = x^2 - y^2$ μόνο για πεπερασμένου πλήθους ζεύγη $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ (εξηγήστε γιατί).

(67) Για το (α) εφαρμόστε επαγωγή στο n, αναπτύσσοντας την ορίζουσα κατά τα στοιχεία της πρώτης στήλης. Για το (β), με κατάλληλες στοιχειώδεις πράξεις στις στήλες και τις γραμμές του πίνακα στο αριστερό μέλος, δείξτε ότι

$$\begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ \mathrm{i}A - B & A + \mathrm{i}B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A - \mathrm{i}B & B \\ O & A + \mathrm{i}B \end{pmatrix}$$

και εφαρμόστε το (α).

(68) Για το (α) αποδείξτε πρώτα ότι

$$\begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ -C & A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & A^{-1}B \\ O & AD - CB \end{pmatrix}$$

και στη συνέχεια εξισώστε τις ορίζουσες των πινάκων στα δύο μέλη αυτής της ισότητας.

(69) Για το (α) παρατηρήστε ότι ο AB είναι $m \times m$ πίνακας και ότι $\mathrm{rank}(AB) \le \mathrm{rank}(A) \le n < m$. Για το (β) θεωρήστε την ισότητα

$$\begin{pmatrix} I_m & A \\ O & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & O \\ -I_n & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O & AB \\ -I_n & B \end{pmatrix}$$

και συνάγετε από αυτήν ότι

$$\det \begin{pmatrix} A & O \\ -I_n & B \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} O & AB \\ -I_n & B \end{pmatrix}$$

και (π.χ. χρησιμοποιώντας το μέρος (α) της Άσκησης 56) ότι ισχύει η προτεινόμενη ταυτότητα. Η ταυτότητα αυτή είναι γνωστή και ως *Θεώρημα Binet-Cauchy*. Για το (γ) χρησιμοποιήστε τα (α) και (β) με $A = Q^t$ και $B = Q$.

(70) Για το (α) αφαιρέστε την πρώτη γραμμή του A από τις υπόλοιπες και δείξτε ότι η ορίζουσα του πίνακα που προκύπτει είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του 2^{n-1}. Για το (β), χρησιμοποιήστε το (α) για να δείξετε ότι η ζητούμενη ελάχιστη τιμή είναι ίση με 2^{n-1}.

(71) Απλά παραδείγματα δείχνουν ότι οι άρτιοι θετικοί ακέραιοι δεν έχουν αυτή την ιδιότητα. Το αντίθετο ισχύει για τους περιττούς. Πράγματι, ας θεωρήσουμε τον τύπο

$$\det(A) = \sum_{w \in S_n} \epsilon(w) a_{1w(1)} a_{2w(2)} \cdots a_{nw(n)}$$

για την ορίζουσα ενός $n \times n$ πίνακα $A = (a_{ij})$, όπου $\epsilon(w) \in \{-1, 1\}$ είναι το πρόσημο της μετάθεσης $w \in S_n$, και ας υποθέσουμε ότι ο A είναι συμμετρικός πίνακας με ακέραια στοιχεία και μηδενικά πάνω στην κύρια διαγώνιο. Τότε, οι όροι του αθροίσματος που αντιστοιχούν σε μεταθέσεις που έχουν ένα τουλάχιστον σταθερό σημείο είναι ίσοι με μηδέν. Αν ο n είναι περιττός, τότε οι υπόλοιπες μεταθέσεις χωρίζονται σε ζευγάρια μεταθέσεων $\{w, w^{-1}\}$ με $w \ne w^{-1}$, τα μέλη w και w^{-1} των οποίων έχουν την ίδια συνεισφορά στο άθροισμα. Αυτό δείχνει ότι η ορίζουσα του A είναι άρτιος αριθμός.

(72) Έστω $A = (a_{ij}) \in \mathbb{F}^{n \times n}$. Για το (α) θεωρήστε άνω τριγωνικό πίνακα $B = (b_{ij}) \in \mathbb{F}^{n \times n}$ με $b_{ij} = a_{ij}$ για $i < j$ και $b_{ii} = a_{ii} - x_i$ για $1 \le i \le n$ και κάτω τριγωνικό πίνακα $C = (c_{ij}) \in \mathbb{F}^{n \times n}$ με $c_{ij} = a_{ij}$ για $i > j$ και $c_{ii} = x_i$ για $1 \le i \le n$. Παρατηρήστε ότι $A = B + C$ και επιλέξτε τα $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{F}$ έτσι ώστε να ισχύουν $\det(B) \ne 0$ και $\det(C) \ne 0$. Για το (β) μπορείτε να υποθέσετε ότι $\mathbb{F} = \{0, 1\}$ είναι το σώμα με δύο στοιχεία. Δείξτε πρώτα ότι το ζητούμενο ισχύει για $n = 2$ και συνεχίστε με επαγωγή στο n ως εξής: Υποθέστε πρώτα ότι $a_{ij} = 0$ για κάποιους δείκτες i και j και θεωρήστε τον πίνακα $A_\circ$ που προκύπτει από τον A διαγράφοντας τη γραμμή i και τη στήλη j. Από την υπόθεση της επαγωγής, μπορούμε να γράψουμε $A_\circ = P + Q$ για κάποιους αντιστρέψιμους πίνακες $P, Q \in \mathbb{F}^{(n-1)\times(n-1)}$. Θεωρήστε πίνακες $B = (b_{ij}) \in \mathbb{F}^{n \times n}$ και $C = (c_{ij}) \in \mathbb{F}^{n \times n}$ με $b_{ij} = c_{ij} = 1$, με $b_{kj} = 0$ για $k \ne i$ και $b_{i\ell} = a_{i\ell}$ για $\ell \ne j$ και με $c_{kj} = a_{kj}$ για $k \ne i$ και $c_{i\ell} = 0$ για $\ell \ne j$. Επιλέξτε τα υπόλοιπα στοιχεία των B και C έτσι ώστε οι πίνακες που προκύπτουν από τους B και C διαγράφοντας τη γραμμή i και τη στήλη j να είναι οι P και Q, αντίστοιχα. Δείξτε ότι $A = B + C$ και ότι οι B και C είναι αντιστρέψιμοι για να ολοκληρώσετε το βήμα της επαγωγής στην περίπτωση αυτή. Αν $a_{ij} = 1$

για όλα τα i και j, τότε γράψτε π.χ.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Μια εναλλακτική λύση για το (β) δίνεται στην Άσκηση 82.

(73) Εφαρμόζοντας επαγωγή στο n, επιλέξτε τα $a_{ii} \in \{0, 1\}$ για $2 \le i \le n$ έτσι ώστε ο πίνακας B που προκύπτει από τον A διαγράφοντας την πρώτη γραμμή και στήλη να είναι αντιστρέψιμος. Έπειτα παρατηρήστε ότι $\det(A) = x\det(B) + c$, όπου $x = a_{11} \in \{0, 1\}$ και το c δεν εξαρτάται από το x.

(74) Έστω $A = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \cdots + \lambda_{n+1} A_{n+1}$. Για το (α), χρησιμοποιώντας την Άσκηση 30, δείξτε ότι υπάρχουν $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n+1} \in \mathbb{F}$, όχι όλα μηδέν, τέτοια ώστε ο πίνακας A να έχει μια μηδενική γραμμή και συνεπώς ορίζουσα μηδέν. Για το (β), παρατηρήστε ότι για

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \; A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ισχύει $\det(A) = \lambda_1^2 + \lambda_2^2$. Για το (γ) να θέσετε

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \; A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \; A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

και

$$A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

και να δείξετε ότι $\det(A) = -(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 + \lambda_4^2)^2$.

(75) Από τη λύση της Άσκησης 26 προκύπτει ότι η τάξη είναι ίση με 1 για $n = 1$ και με 2 αν $n \ge 2$.

(76) Δείξτε ότι η ζητούμενη μέγιστη τιμή είναι ίση με $n - 1$ ως εξής. Παρατηρήστε πρώτα ότι κάθε μηδενοδύναμος $n \times n$ πίνακας έχει ορίζουσα ίση με μηδέν και επομένως τάξη μικρότερη του n. Συμβουλευτείτε έπειτα την Άσκηση 22 (γ) και δώστε παράδειγμα μηδενοδύναμου $n \times n$ πίνακα με τάξη ίση με $n - 1$.

(77) Για το (α), γνωρίζουμε ότι υπάρχουν στοιχειώδεις πίνακες $E_1, E_2, \ldots, E_k \in \mathbb{F}^{m \times m}$ για τους οποίους ο πίνακας $A' = E_k \cdots E_2 E_1 A$ είναι κλιμακωτός και ότι η τάξη του A είναι ίση με το πλήθος, έστω r, των μη μηδενικών γραμμών του A'. Γνωρίζουμε επίσης ότι $\text{rank}(AB) = \text{rank}(E_k \cdots E_2 E_1 AB) = \text{rank}(A'B)$. Αφού ο A' έχει r μη μηδενικές γραμμές, ο πίνακας $A'B$ έχει το πολύ r μη μηδενικές γραμμές και συνεπώς $\text{rank}(A'B) \le r$. Από τα προηγούμενα προκύπτει ότι $\text{rank}(AB) = \text{rank}(A'B) \le r = \text{rank}(A)$. Για το (β) χρησιμοποιούμε το (α) και βρίσκουμε ότι $\text{rank}(AB) = \text{rank}(AB)^t = \text{rank}(B^t A^t) \le \text{rank}(B^t) = \text{rank}(B)$.

(78) Η ισοδυναμία (α) $\Leftrightarrow$ (β) είναι συνέπεια του ορισμού της τάξης. Δείξτε ότι (α) $\Rightarrow$ (γ) $\Rightarrow$ (δ) $\Rightarrow$ (α) ως εξής: Για τη συνεπαγωγή (α) $\Rightarrow$ (γ) θεωρήστε ανηγμένο κλιμακωτό πίνακα $A' \in \mathbb{F}^{m \times n}$ γραμμο¨σοδύναμο του A, παρατηρήστε ότι όλες οι γραμμές του A' είναι μη μηδενικές και συμπεράνετε ότι το γραμμικό σύστημα $A'x = b'$ είναι συμβιβαστό για κάθε $b' \in \mathbb{F}^{m \times 1}$. Για τη (γ) $\Rightarrow$ (δ) θεωρήστε τις στήλες $e_1, e_2, \ldots, e_m$ του πίνακα I_m (που απαρτίζουν την κανονική βάση του $\mathbb{F}^{m \times 1}$), επιλέξτε διανύσματα $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m \in \mathbb{F}^{n \times 1}$ με $A\xi_i = e_i$ για $1 \le i \le m$

και δείξτε ότι ο πίνακας B με στήλες $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$ ικανοποιεί την ισότητα $AB = I_m$. Για τη (δ) $\Rightarrow$ (α) χρησιμοποίστε την Άσκηση 77 για να δείξετε ότι $m = \mathrm{rank}(I_m) = \mathrm{rank}(AB) \leq \mathrm{rank}(A)$ και συμπεράνετε ότι $\mathrm{rank}(A) = m$.

(79) Η ισοδυναμία (α) $\Leftrightarrow$ (β) είναι συνέπεια του ορισμού της τάξης. Για την ισοδυναμία (α) $\Leftrightarrow$ (ε) παρατηρήστε ότι $\mathrm{rank}(A^t) = n$ και εφαρμόστε την ισοδυναμία (α) $\Leftrightarrow$ (δ) της Άσκησης 78 στον πίνακα $A^t \in \mathbb{F}^{n\times m}$. Τέλος δείξτε ότι (β) $\Rightarrow$ (γ) $\Rightarrow$ (δ) $\Rightarrow$ (α) ως εξής: Για τη συνεπαγωγή (β) $\Rightarrow$ (γ) παρατηρήστε ότι για κάθε $b \in \mathbb{F}^{m\times 1}$ το γραμμικό σύστημα που αποτελείται από τις εξισώσεις του $Ax = b$ που αντιστοιχούν στις γραμμές της μη μηδενικής $n \times n$ υποορίζουσας του A έχει μοναδική λύση και συμπεράνετε ότι το σύστημα $Ax = b$ έχει το πολύ μία λύση. Για τη (δ) $\Rightarrow$ (α) θεωρήστε ανηγμένο κλιμακωτό πίνακα $A' \in \mathbb{F}^{m\times n}$ γραμμο¨σοδύναμο του A, παρατηρήστε ότι γραμμικό σύστημα $A'x = 0$ έχει μόνο την τετριμμένη λύση $x = 0$ και συμπεράνετε ότι ο A' έχει ακριβώς n μη μηδενικές γραμμές, οπότε $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(A') = n$. Η συνεπαγωγή (γ) $\Rightarrow$ (δ) είναι τετριμμένη.

(80) Για το (α) εφαρμόστε την Άσκηση 77. Για το (β) χρησιμοποιήστε το γεγονός ότι ο P γράφεται ως γινόμενο στοιχειωδών πινάκων. Για το (γ) χρησιμοποιήστε το (β) και συμπεράνετε ότι $\mathrm{rank}(AQ) = \mathrm{rank}(AQ)^t = \mathrm{rank}(Q^tA^t) = \mathrm{rank}(A^t) = \mathrm{rank}(A)$. Το (δ) έπεται από το (α), ή από τα (β) και (γ).

(81) Την ιδιότητα αυτή έχουν ο μηδενικός $n \times n$ πίνακας και κάθε αντιστρέψιμος πίνακας $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ αφού τότε, σύμφωνα με την Άσκηση 80, $\mathrm{rank}(AX) = \mathrm{rank}(X)$ και $\mathrm{rank}(XA) = \mathrm{rank}(X)$ για κάθε πίνακα $X \in \mathbb{F}^{n\times n}$. Θα δείξουμε ότι μόνο αυτοί οι πίνακες έχουν την επιθυμητή ιδιότητα. Πράγματι, έστω ότι ο $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ δεν είναι αντιστρέψιμος και έχει την ιδιότητα. Τότε, υπάρχει μη μηδενικό διάνυσμα

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \ker(A).$$

Για τυχαία $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{F}$ θεωρούμε τον $n \times n$ πίνακα X με στήλες $\lambda_1 x, \lambda_2 x, \ldots, \lambda_n x \in \ker(A)$. Τότε, $AX = O$ και συνεπώς $\mathrm{rank}(AX) = 0$. Από την υπόθεσή μας για τον A προκύπτει ότι $\mathrm{rank}(XA) = 0$, οπότε $XA = O$ ή, ισοδύναμα,

$$A^tX^t = A^t \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 x_1 & \lambda_1 x_2 & \cdots & \lambda_1 x_n \\ \lambda_2 x_1 & \lambda_2 x_2 & \cdots & \lambda_2 x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_n x_1 & \lambda_n x_2 & \cdots & \lambda_n x_n \end{pmatrix} = O.$$

Αφού $x_i \neq 0$ για κάποιο i, έπεται ότι

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \in \ker(A^t)$$

για όλα τα $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{F}$. Συμπεραίνουμε ότι $A^t = O$, δηλαδή ότι $A = O$.

(82) Το (α) είναι γνωστό από τη θεωρία. Για το (β) (όπου $m = n$), χρησιμοποιώντας τις ισότητες

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ και } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

καθώς και την $O = I + (-I)$, δείξτε πρώτα ότι ο πίνακας J_r μπορεί να γραφεί ως άθροισμα δύο αντιστρέψιμων πινάκων, τα στοιχεία των οποίων ανήκουν στο σύνολο $\{-1, 0, 1\}$. Για τη γενική περίπτωση, σύμφωνα με το (α), γράψτε τον A στη μορφή $A = P^{-1} J_r Q^{-1}$ και εφαρμόστε την ειδική περίπτωση.

(83) Εφαρμόζοντας την Άσκηση 56 (α), δείξτε πρώτα ότι $\mathrm{rank}(A + B) \le \mathrm{rank}(A \,|\, B)$, όπου $A \,|\, B$ είναι ο $m \times 2n$ πίνακας που προκύπτει παραθέτοντας τις στήλες του B στα δεξιά των στηλών του A. Δείξτε έπειτα ότι $\mathrm{rank}(A \,|\, B) \le \mathrm{rank}(A) + \mathrm{rank}(B)$ εκτελώντας κατάλληλα στοιχειώδεις μετασχηματισμούς στις γραμμές του ανάστροφου του πίνακα $A \,|\, B$.

(84) Παρατηρήστε πρώτα ότι

$$\begin{aligned} I - A_1 A_2 \cdots A_m &= (I - A_m) + (A_m - A_{m-1} A_m) + \cdots + (A_2 \cdots A_{m-1} A_m - A_1 A_2 \cdots A_m) \\ &= \sum_{i=1}^{m} (I - A_i) B_i, \end{aligned}$$

όπου $B_i = A_{i+1} \cdots A_{m-1} A_m$ για $1 \le i \le m - 1$ και $B_m = I$, και εφαρμόστε έπειτα τις ασκήσεις 83 και 77.

(85) Έστω $A = (a_{ij})$ πίνακας με τις δοσμένες ιδιότητες. Προφανώς ισχύει $\mathrm{rank}(A) \le n$. Δείξτε ότι $\mathrm{rank}(A) \ge 2$ ως εξής: Αφού μεταθέτοντας τις γραμμές ή τις στήλες ενός πίνακα δε μεταβάλλεται η τάξη αυτού, μπορείτε να υποθέσετε (γιατί;) ότι $1 = a_{11} < a_{12} < \cdots < a_{1n}$ και ότι $a_{11} < a_{21} < \cdots < a_{n1}$. Δείξτε ότι η 2×2 υποορίζουσα του A που σχηματίζεται από την πρώτη και τελευταία γραμμή και στήλη είναι αρνητική και συνάγετε το ζητούμενο. Έπειτα, δείξτε ότι υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας (δηλαδή πίνακας τάξης n) με τις δοσμένες ιδιότητες ως εξής: Επιλέξτε τα στοιχεία στην κύρια διαγώνιο του A να είναι όλα περιττοί ακέραιοι και εκείνα πάνω από την κύρια διαγώνιο να είναι όλα άρτιοι ακέραιοι και δείξτε ότι η ορίζουσα ενός τέτοιου πίνακα είναι περιττός ακέραιος. Τέλος, συμπεράνετε από τις Ασκήσεις 26 και 75 ότι η ισότητα $\mathrm{rank}(A) = 2$ είναι επίσης εφικτή. Συνεπώς η ζητούμενη ελάχιστη τιμή είναι ίση με 2 και η μέγιστη ίση με n.

(86) Αν ο n είναι άρτιος, δείξτε ότι η ορίζουσα του A είναι περιττός ακέραιος και συμπεράνετε ότι ο A είναι αντιστρέψιμος. Αν ο n είναι περιττός, δείξτε ότι οι πιθανές τιμές της τάξης του A είναι οι $n - 1$ και n ως εξής: Συνάγετε από το (α) ότι η $(n - 1) \times (n - 1)$ υποορίζουσα του πίνακα που σχηματίζουν οι πρώτες $n - 1$ γραμμές και στήλες του A είναι διάφορη του μηδενός και συμπεράνετε ότι $\mathrm{rank}(A) \ge n - 1$. Έπειτα δείξτε ότι αν όλα τα στοιχεία του A εκτός της κύριας διαγωνίου είναι ίσα με 1, τότε $\det(A) = (-1)^{n-1}(n - 1)$ και συνεπώς $\mathrm{rank}(A) = n$. Τέλος παρατηρήστε ότι οποιοσδήποτε αντισυμμετρικός $n \times n$ πίνακας με στοιχεία πραγματικούς αριθμούς έχει ορίζουσα μηδέν και συνάγετε ότι η ισότητα $\mathrm{rank}(A) = n - 1$ είναι επίσης εφικτή.

(87) Θεωρήστε τον $n \times n$ πίνακα J κάθε στοιχείο του οποίου είναι ίσο με -1 και παρατηρήστε ότι $\det(A + J) \equiv (-1)^n$ modulo 2009. Συνάγετε ότι ο πίνακας $A + J$ είναι αντιστρέψιμος και εφαρμόστε την Άσκησης 83 για τους πίνακες A και J για να δείξετε ότι $\mathrm{rank}(A) \ge n - 1$.

(88) Για το (α) εργασθείτε ως εξής: Υποθέστε ότι $\mathrm{rank}(A) \le n - 2$ και θεωρήστε τον $(n + 1) \times n$ πίνακα B που προκύπτει από τον A προσθέτοντας τη γραμμή $(1\ 1\ \cdots\ 1)$ (π.χ. στο τέλος). Παρατηρήστε ότι $\mathrm{rank}(B) \le n-1$ και συμπεράνετε ότι υπάρχει μη μηδενικό διάνυσμα $x = (x_1\ x_2\ \cdots\ x_n)^t \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ με $Bx = 0$, δηλαδή με $Ax = 0$ και $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$. Καταλήξτε σε άτοπο παρατηρώντας ότι $x^t(A^t + A)x = x^t A^t x + x^t A x = (Ax)^t x + x^t(Ax) = 0$ και ότι $x^t(J_n - I_n)x = x^t J_n x - x^t x = (x_1 + \cdots + x_n)^2 - x^t x = -(x_1^2 + \cdots + x_n^2) < 0$. Για το (β) θεωρήστε το μοναδικό άνω τριγωνικό πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ με $A^t + A = J_n - I_n$. Για το (γ) δείξτε ότι ο πίνακας $J_n - I_n$ είναι αντιστρέψιμος για $n \ge 2$ και θέστε $A = (J_n - I_n)/2$.

(89) Για το (α) παρατηρήστε ότι $A = P^{-1}PA = APP^{-1}$ και χρησιμοποιήστε τη δοσμένη ιδιότητα της f. Για το (β) χρησιμοποιήστε το (α) και την Άσκηση 82 (α). Για το (γ) παρατηρήστε ότι $J_k J_{k+1} = J_k$.

(90) Για την ισοδυναμία (α) ⇔ (β) παρατηρήστε ότι αν $v_1, v_2, \ldots, v_n$ είναι οι στήλες του A, τότε $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = Ax$ όπου $x = (\lambda_1 \ \lambda_2 \ \cdots \ \lambda_n)^t \in \mathbb{F}^{n\times 1}$. Η ισοδυναμία (β) ⇔ (γ) είναι συνέπεια του ορισμού της απεικόνισης L_A. Η ισοδυναμία (β) ⇔ (δ) είναι ταυτόσημη με την ισοδυναμία (α) ⇔ (γ) της Άσκησης 78.

(91) Για την ισοδυναμία (α) ⇔ (β) παρατηρήστε ότι αν $v_1, v_2, \ldots, v_n$ είναι οι στήλες του A, τότε $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = Ax$ όπου $x = (\lambda_1 \ \lambda_2 \ \cdots \ \lambda_n)^t \in \mathbb{F}^{n\times 1}$. Για την ισοδυναμία (β) ⇔ (γ) παρατηρήστε ότι $L_A(x) = L_A(y) \Leftrightarrow A(x-y) = 0$. Η ισοδυναμία (β) ⇔ (δ) είναι ταυτόσημη με την ισοδυναμία (α) ⇔ (δ) της Άσκησης 79.

(92) Υποθέστε ότι οι στήλες του δοσμένου πίνακα είναι γραμμικώς εξαρτημένες και συμπεράνετε ότι υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί $c_1, c_2, \ldots, c_n$, όχι όλοι μηδέν, τέτοιοι ώστε η συνάρτηση $f : \mathbb{R} - \{-1, -2, \ldots, -n\} \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{x+i}$$

να έχει διακεκριμένες πραγματικές ρίζες $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Πολλαπλασιάστε την εξίσωση $f(x) = 0$ με $(x+1)(x+2)\cdots(x+n)$ και δείξτε ότι αυτό είναι αδύνατο.

(93) Το (α) είναι εύκολο. Απάντηση για το (β): Έστω $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ η κανονική βάση του $\mathbb{F}^{n\times 1}$. Μια βάση του W είναι η $(e_1 - e_n, e_2 - e_n, \ldots, e_{n-1} - e_n)$. Μια άλλη είναι η $(e_1 - e_2, e_2 - e_3, \ldots, e_{n-1} - e_n)$. Ειδικότερα, έχουμε $\dim(W) = n - 1$.

(94) Για το (α) θεωρήστε κλιμακωτό πίνακα $B \in \mathbb{F}^{n\times m}$ γραμμο¨σοδύναμο του A^t. Παρατηρήστε ότι ο υπόχωρος του $\mathbb{F}^{m\times 1}$ που παράγεται από τις στήλες του A είναι ίσος με εκείνον που παράγεται από τις στήλες του B^t, δείξτε ότι οι μη μηδενικές στήλες του B^t είναι γραμμικώς ανεξάρτητα στοιχεία του $\mathbb{F}^{m\times 1}$ και συμπεράνετε ότι η ζητουμενη διάσταση είναι ίση με $\mathrm{rank}(B^t) = \mathrm{rank}(A)$. Το (β) είναι συνέπεια του (α) και της ισότητας $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(A^t)$.

(95) Θεωρούμε ανηγμένο κλιμακωτό πίνακα $A' \in \mathbb{F}^{m\times n}$ γραμμο¨σοδύναμο του A, οπότε $\ker(A) = \ker(A')$ και $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(A')$ είναι το πλήθος των μη μηδενικών γραμμών (άρα και των ηγετικών στοιχείων) του A'. Λύνοντας το ομογενές γραμμικό σύστημα $A'x = 0$ με τη γνωστή διαδικασία προκύπτει ότι $\ker(A) = \langle u_1, u_2, \ldots, u_k \rangle$ για κάποια $u_1, u_2, \ldots, u_k \in \mathbb{F}^{n\times 1}$, όπου $k = n - \mathrm{rank}(A)$ είναι το πλήθος των στηλών του A χωρίς ηγετικό στοιχείο (ισοδύναμα, το πλήθος των μεταβλητών στις οποίες δίνονται αυθαίρετες τιμές). Δείχνουμε ότι k από τις γραμμές (αυτές που αντιστοιχούν στις k στήλες του A χωρίς ηγετικό στοιχείο) του $n \times k$ πίνακα με στήλες $u_1, u_2, \ldots, u_k$ σχηματίζουν τον $k \times k$ ταυτοτικό πίνακα και συνάγουμε από την Άσκηση 91 ότι τα $u_1, u_2, \ldots, u_k$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα στοιχεία του $\mathbb{F}^{n\times 1}$. Από τα παραπάνω έπεται ότι $\dim\ker(A) = k = n - \mathrm{rank}(A)$.

(96) Δείξτε ότι υπάρχουν συνολικά τέσσερις δυνατότητες. Αν ισχύει $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ για κάθε $(x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n)^t \in W$, δείξτε ότι ο W είναι είτε ο μηδενικός υπόχωρος, είτε ο μονοδιάστατος υπόχωρος του $\mathbb{R}^{n\times 1}$ που παράγεται από το διάνυσμα $(1 \ 1 \ \cdots \ 1)^t$. Αν υπάρχει $(x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n)^t \in W$ και δείκτες i, j με $x_i \neq x_j$, δείξτε ότι ο W περιέχει τον υπόχωρο $\{(x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n)^t \in \mathbb{R}^{n\times 1} : x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0\}$ διάστασης $n-1$ του $\mathbb{R}^{n\times 1}$ και συνάγετε ότι είτε ο W είναι ίσος με αυτόν τον υπόχωρο, είτε $W = \mathbb{R}^{n\times 1}$.

(97) Θεωρήστε το σύνολο U με στοιχεία τα διανύσματα $u \in \mathbb{F}^{n\times 1}$ για τα οποία ισχύει $u^t x = 0$ για κάθε $x \in W$. Δείξτε ότι το U είναι υπόχωρος του $\mathbb{F}^{n\times 1}$ και θεωρήστε μια βάση $(u_1, u_2, \ldots, u_r)$ αυτού, όπου $r = \dim(U)$, καθώς και τον πίνακα $A \in \mathbb{F}^{r\times n}$ με γραμμές $u_1^t, u_2^t, \ldots, u_r^t$. Δείξτε ότι $W = \ker(A)$ ως εξής. Παρατηρήστε πρώτα ότι $Ax = 0$ για κάθε $x \in W$ και συμπεράνετε

ότι $W \subseteq \ker(A)$. Αρκεί επομένως να δείξει κανείς ότι $\dim(W) = \dim\ker(A)$. Έστω $\dim(W) = k$ και έστω βάση $(w_1, w_2, \ldots, w_k)$ του W. Δείξτε ότι $U = \{u \in \mathbb{F}^{n\times 1} : u^t w_1 = u^t w_2 = \cdots = u^t w_k = 0\}$ και συμπεράνετε ότι $U = \ker(B)$, όπου $B \in \mathbb{F}^{k\times n}$ είναι ο πίνακας με γραμμές $w_1^t, w_2^t, \ldots, w_k^t$. Από την Άσκηση 91 συνάγετε ότι $\operatorname{rank}(A) = r = \dim(U)$ και $\operatorname{rank}(B) = k$ και από την Άσκηση 95 ότι $\dim(U) = \dim\ker(B) = n - \operatorname{rank}(B) = n - k$ και συμπεράνετε ότι πράγματι $\dim(W) = k = n - \dim(U) = n - \operatorname{rank}(A) = \dim\ker(A)$.

(98) Για το (α) χρησιμοποιήστε την Άσκηση 48. Για το (β) χρησιμοποιήστε πρώτα τον ορισμό της τάξης και του προσαρτημένου πίνακα για να δείξετε ότι $adj(A) \neq O$. Έπειτα παρατηρήστε ότι $\dim\ker(A) = 1$ και ότι $\det(A) = 0$ και συμπεράνετε ότι $A \cdot adj(A) = O$. Από την τελευταία ισότητα συνάγετε ότι οι στήλες του πίνακα $adj(A)$ ανήκουν στον πυρήνα $\ker(A)$ και συμπεράνετε το ζητούμενο. Για το (γ) χρησιμοποιήστε τον ορισμό της τάξης και του προσαρτημένου πίνακα για να δείξετε ότι $adj(A) = O$.

(99) Εύκολα αποκλείονται οι περιπτώσεις $n = 1$ και $n = 2$. Θα δείξουμε ότι κάθε ακέραιος $n \geq 3$ έχει την ιδιότητα της άσκησης. Θεωρούμε τις στήλες του πίνακα A ως διανύσματα $v_1, v_2, \ldots, v_n$ στο χώρο $\mathbb{R}^{n\times 1}$ και για κάθε $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n$ θεωρούμε το υποσύνολο

$$\Omega_\varepsilon = \{(x_1\ x_2\ \cdots\ x_n)^t \in \mathbb{R}^{n\times 1} : \varepsilon_1 x_1 > 0, \varepsilon_2 x_2 > 0, \ldots, \varepsilon_n x_n > 0\}$$

του $\mathbb{R}^{n\times 1}$. Παρατηρούμε ότι κάθε διάνυσμα v_i ανήκει σε ακριβώς ένα, έστω το Ω_i, από αυτά τα υποσύνολα και ότι ο πολλαπλασιασμός των στοιχείων του A με τυχαίους θετικούς πραγματικούς αριθμούς ισοδυναμεί με την αντικατάσταση κάθε διανύσματος v_i με τυχαίο στοιχείο του συνόλου Ω_i στο οποίο το v_i ανήκει. Κατά συνέπεια, αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχουν γραμμικώς εξαρτημένα διανύσματα $u_1, u_2, \ldots, u_n$ του $\mathbb{R}^{n\times 1}$ τέτοια ώστε $u_i \in \Omega_i$ για κάθε i. Αφού υπάρχουν ακριβώς 2^n σύνολα της μορφής Ω_ε και $n \geq 3$, οπότε $2^{n-1} > n$, υπάρχει $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n$ για το οποίο το Ω_ε και το αντίθετό του $-\Omega_\varepsilon$ δεν περιλαμβάνονται ανάμεσα στα $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_n$. Τότε, ο υπόχωρος

$$H = \{(x_1\ x_2\ \cdots\ x_n)^t \in \mathbb{R}^{n\times 1} : \varepsilon_1 x_1 + \varepsilon_2 x_2 + \cdots + \varepsilon_n x_n = 0\}$$

διάστασης $n-1$ του $\mathbb{R}^{n\times 1}$ τέμνει μη προφανώς καθένα από τα $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_n$. Επιλέγοντας τυχαίο $u_i \in H \cap \Omega_i$ για $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ έχουμε γραμμικώς εξαρτημένα διανύσματα $u_1, u_2, \ldots, u_n$ με τις επιθυμητές ιδιότητες.

(100) Ας γράψουμε τις δοσμένες ισότητες στη μορφή

$$\sum_{j=1}^{n} a_{kj} v_j = 0_V, \qquad k = 1, 2, \ldots, m$$

και ας θέσουμε $u_k = \sum_{j=1}^n a_{kj} v_j$ για $k \in \{1, 2, \ldots, m\}$. Αφού $\operatorname{rank}(A) = n$, από την Άσκηση 79 προκύπτει ότι υπάρχει πίνακας $B = (b_{ij}) \in \mathbb{F}^{n\times m}$ τέτοιος ώστε $BA = I_n$. Χρησιμοποιώντας τις ισότητες $\sum_{k=1}^m b_{ik} a_{kj} = \delta_{ij}$, βρίσκουμε ότι

$$0_V = \sum_{k=1}^{m} b_{ik} u_k = \sum_{k=1}^{m} b_{ik} \sum_{j=1}^{n} a_{kj} v_j = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{m} b_{ik} a_{kj} \right) v_j = \sum_{j=1}^{n} \delta_{ij} v_j = v_i$$

για $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ και συμπεραίνουμε το ζητούμενο.

(101) Υποθέστε ότι $m < n$ και καταλήξτε σε άτοπο ως εξής: Γράψτε το u_j ως γραμμικό συνδυασμό $u_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} v_i$ των v_i για $1 \leq j \leq n$ και παρατηρήστε ότι για $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{F}$ έχουμε $\sum_{j=1}^n \lambda_j u_j = \sum_{j=1}^n \lambda_j (\sum_{i=1}^m a_{ij} v_i) = \sum_{i=1}^m (\sum_{j=1}^n a_{ij} \lambda_j) v_i$. Συνάγετε από την Άσκηση 30 (α) ότι υπάρχουν $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{F}$, όχι όλα μηδέν, τέτοια ώστε να ισχύει $\sum_{j=1}^n a_{ij} \lambda_j = 0$ για $1 \leq i \leq m$. Συμπεράνετε ότι τα $u_1, u_2, \ldots, u_n$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα, σε αντίθεση με την υπόθεση.

(102) Βρείτε μια βάση για τον κάθε υπόχωρο που να αποτελείται από πίνακες της μορφής E_{ij} ή $E_{ij}+E_{ji}$ ή $E_{ij}-E_{ji}$. Συνάγετε ότι η διάσταση του δοσμένου υπόχωρου είναι ίση με $n(n+1)/2$ στις περιπτώσεις (α) και (γ), και με $n(n-1)/2$ στις περιπτώσεις (β) και (δ).

(103) Για το (α) δείξτε, βρίσκοντας μια βάση του W_n ή με άλλο τρόπο, ότι $\dim(W_n) = n^2-1$. Το (β) προκύπτει άμεσα από το (α). Για το (γ) θεωρήστε π.χ. τους πίνακες E_{ii} για $1 \le i \le n$ και $E_{ij}+E_{11}$ για $1 \le i, j \le n$ με $i \ne j$. Για το (δ), παρατηρήστε ότι το σύνολο V των πινάκων $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ για τους οποίους ισχύει $AB = BA$ είναι υπόχωρος του $\mathbb{F}^{n\times n}$. Χρησιμοποιώντας την Άσκηση 18 (β), δείξτε ότι το V είναι γνήσιος υπόχωρος του $\mathbb{F}^{n\times n}$ και συμπεράνετε το ζητούμενο.

(104) Το (α) είναι εύκολο. Για το (β) εργασθείτε όπως στην Άσκηση 93. Για το (γ) θεωρήστε πίνακα $X = (x_{ij}) \in V$ και λύστε τις γραμμικές εξισώσεις στις mn μεταβλητές x_{ij} που ορίζουν τον υπόχωρο V ως προς τις x_{in} και x_{mj} για $1 \le i \le m$ και $1 \le j \le n$. Συνάγετε ότι μια βάση του V αποτελείται από τους πίνακες $E_{ij}-E_{in}-E_{mj}+E_{mn}$ για $1 \le i \le m-1$ και $1 \le j \le n-1$ και συνεπώς ότι $\dim(V) = (m-1)(n-1)$.

(105) Για το (α), δείξτε ότι τα $\phi_0(x), \phi_1(x), \dots, \phi_n(x)$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα στοιχεία του $\mathbb{F}_n[x]$ (αυτό αρκεί αφού η διάσταση του $\mathbb{F}_n[x]$ είναι ίση με $n+1$) ως εξής: Υποθέστε ότι $\lambda_0\phi_0(x) + \lambda_1\phi_1(x) + \cdots + \lambda_n\phi_n(x) = 0$ για κάποια $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{F}$. Εξισώνοντας τους συντελεστές του x^n στα δύο μέλη αυτής της ισότητας, δείξτε ότι $\lambda_n = 0$ και συνεχίστε με επαγωγή στο n. Για το (γ), υποθέστε ότι $p(x) = c_0 + c_1(x-a) + \cdots + c_n(x-a)^n$. Παραγωγίζοντας i φορές ως προς x και θέτοντας $x = a$, δείξτε ότι $c_i = p^{(i)}(a)/i!$ για $0 \le i \le n$, όπου $p^{(i)}(x)$ είναι η i-οστή παράγωγος του $p(x)$.

(106) Το (α) είναι εύκολο. Για το (β) παρατηρήστε ότι τα δοσμένα πολυώνυμα είναι $n+1$ στοιχεία του W και ότι $\dim(W) < \dim(\mathbb{F}_n[x]) = n+1$. Για το (γ), συνάγετε από την Άσκηση 105 ότι τα πολυώνυμα $p_i(x) = b + (x-a)^i$ για $0 \le i \le n$ έχουν τις ζητούμενες ιδιότητες.

(107) Για το (α) υποθέστε ότι ισχύει $\lambda_1\phi_1(x) + \lambda_2\phi_2(x) + \cdots + \lambda_n\phi_n(x) = 0$ για κάποια $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{F}$ και θέστε $x = a_i$ για να συμπεράνετε ότι $\lambda_i = 0$, για κάθε δείκτη i. Συμπεράνετε ότι τα $\phi_1(x), \phi_2(x), \dots, \phi_n(x)$ αποτελούν τα στοιχεία μιας βάσης του χώρου $\mathbb{F}_{n-1}[x]$. Γράφοντας ένα δοσμένο πολυώνυμο $p(x) \in \mathbb{F}_{n-1}[x]$ ως γραμμικό συνδυασμό $p(x) = c_1\phi_1(x) + c_2\phi_2(x) + \cdots + c_{n-1}\phi_{n-1}(x)$ των στοιχείων αυτής της βάσης, θέστε $x = a_i$ στην προηγούμενη ισότητα για να δείξετε ότι $p(a_i) = c_i\phi_i(a_i) = c_i\phi'(a_i)$.

(108) Για το (α) υποθέστε ότι ισχύει $\lambda_0\phi_0(x) + \lambda_1\phi_1(x) + \cdots + \lambda_n\phi_n(x) = 0$ για κάποια $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{F}$ και θέστε $x = 0$ για να δείξετε ότι $\lambda_0 = 0$. Διαιρέστε με το x τη σχέση που προκύπτει και χρησιμοποιήστε επαγωγή στο n για να συμπεράνετε ότι $\lambda_i = 0$ κάθε δείκτη i. Για το (β) γράψτε $x^k = \sum_{i=0}^n c_i\phi_i(x) = \sum_{i=0}^n c_i x^i (1+x)^{n-i}$. Διαιρέστε με x^n και θέστε $y = (1+x)/x$ για να δείξετε ότι $(y-1)^{n-k} = \sum_{i=0}^n c_i y^{n-i}$. Συμπεράνετε ότι $c_i = (-1)^{i-k}\binom{n-k}{i-k}$ για $0 \le i \le n$ (οπότε $c_i = 0$ για $i < k$). Απάντηση για το (γ): $c_0 = 1$, $c_1 = -3$, $c_2 = 4$, $c_3 = -2$ και $c_4 = 1$.

(109) Για την ισοδυναμία (i) $\Leftrightarrow$ (ii) χρησιμοποιήστε τη σχέση $\dim(U+W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$. Για τη συνεπαγωγή (ii) $\Rightarrow$ (iv) δείξτε ότι το σύνολο $\mathcal{B} \cup \mathcal{C}$ παράγει το χώρο V και ότι έχει το πολύ n στοιχεία και συνάγετε το ζητούμενο. Η συνεπαγωγή (iv) $\Rightarrow$ (iii) είναι τετριμμένη και η (iii) $\Rightarrow$ (ii) αφήνεται σε εσάς.

(110) Παρατηρήστε ότι για $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + c_nx^n \in V_n$ ισχύουν: (i) $p(x) \in U_n$ αν και μόνο αν $a_i = 0$ για κάθε περιττό δείκτη i και (ii) $p(x) \in W_n$ αν και μόνο αν $a_i = 0$ για κάθε άρτιο δείκτη i. Συμπεράνετε ότι $U_n = \langle 1, x^2, x^4, \dots \rangle$ και ότι $W_n = \langle x, x^3, \dots \rangle$ και συνάγετε ότι ισχύει το (α). Δείξτε επίσης ότι τα σύνολα

$\{x^{2k} : 0 \leq k \leq n/2\}$ και $\{x^{2k-1} : 1 \leq k \leq (n+1)/2\}$ είναι βάσεις των U_n και W_n, αντίστοιχα, και συνάγετε ότι $\dim(U_n) = 1 + \lfloor n/2 \rfloor$ και $\dim(W_n) = \lfloor (n+1)/2 \rfloor$. Για το (γ) χρησιμοποιήστε τα παραπάνω και την ισοδυναμία (i) $\Leftrightarrow$ (iii) της Άσκησης 109.

(111) Θεωρήστε μια βάση $\{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$ του U, όπου $k = \dim(U) < n$, και επεκτείνετε αυτή σε βάση $B = \{u_1, u_2, \ldots, u_k, v_1, v_2, \ldots, v_{n-k}\}$ του V. Για $1 \leq i \leq n-k$, θεωρήστε τον υπόχωρο W_i του V που παράγεται από τα στοιχεία της B εκτός του v_i. Δείξτε ότι $U = W_1 \cap W_2 \cap \cdots \cap W_{n-k}$ και συνάγετε το ζητούμενο.

(112) Για το (α) δείξτε πρώτα ότι $n-1 \leq \dim(U+W) \leq n$ και ότι $\dim(U+W) = n-1 \Leftrightarrow U \subseteq W$. Έπειτα θυμηθείτε ότι $\dim(U+W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$. Για το (β) χρησιμοποιήστε το (α) για να συμπεράνετε ότι $\dim(W_1 \cap W_2) = n-2$. Για το (γ) χρησιμοποιήστε το (α) με $U = W_1 \cap W_2 \cap \cdots \cap W_{r-1}$ και επαγωγή στο r για να δείξετε ότι $n - r \leq \dim(W_1 \cap W_2 \cap \cdots \cap W_r) \leq n-1$. Δείξτε επίσης με παράδειγμα ότι η διάσταση του $W_1 \cap W_2 \cap \cdots \cap W_r$ μπορεί να λάβει οποιαδήποτε τιμή στο σύνολο $\{n-r, n-r+1, \ldots, n-1\}$.

(113) Το (α) είναι εύκολο. Για το (β), βρείτε π.χ. παράδειγμα με $U \cap W = V \cap W = \{0\}$ και $(U+V) \cap W \neq \{0\}$. Για το (γ) παρατηρήστε ότι $\dim(U+V+W) = \dim(U+V) + \dim(W) - \dim((U+V) \cap W)$ και ότι $\dim(U+V) = \dim(U) + \dim(V) - \dim(U \cap V)$ και χρησιμοποιήστε το (α). Το (δ) προκύπτει εύκολα από το (γ).

(114) Έστω $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \in \mathbb{F}_n[x]$. Παρατηρήστε ότι $p(x) \in W_n$ αν και μόνο αν $p(x) = a_0 p_0(x) + a_1 p_1(x) + \cdots + a_{\lfloor n/2 \rfloor} p_{\lfloor n/2 \rfloor}(x)$ και συνάγετε ότι το W_n συμπίπτει με τη γραμμική θήκη των στοιχείων $p_0(x), p_1(x), \ldots, p_{\lfloor n/2 \rfloor}(x)$ του $\mathbb{F}_n[x]$. Ειδικότερα ισχύει το (α) και τα $p_0(x), p_1(x), \ldots, p_{\lfloor n/2 \rfloor}(x)$ παράγουν τον υπόχωρο W_n. Δείξτε απευθείας ότι τα πολυώνυμα αυτά, καθώς και τα $\phi_0(x), \phi_1(x), \ldots, \phi_{\lfloor n/2 \rfloor}(x)$, είναι γραμμικώς ανεξάρτητα και συνάγετε ότι ισχύουν τα (β) και (γ). Θεωρήστε τώρα ότι $\mathbb{F} = \mathbb{R}$. Παρατηρήστε ότι αν $p(x) \in W_n$, τότε

$$p(x) = \sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (a_i - a_{i-1})\, \phi_i(x),$$

όπου $a_{-1} = 0$ κατά σύμβαση. Συνάγετε ότι αν το $p(x)$ είναι μονότροπο, τότε αυτό γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των $\phi_0(x), \phi_1(x), \ldots, \phi_{\lfloor n/2 \rfloor}(x)$ με συντελεστές μη αρνητικούς πραγματικούς αριθμούς. Δείξτε ότι ισχύει επίσης το αντίστροφο (εύκολο) και συνάγετε ότι ισχύει το (δ). Για το (ε) χρησιμοποιήστε το (δ).

(115) Για το (α) παρατηρήστε ότι το S είναι γραμμικώς εξαρτημένο και ότι παράγει το χώρο V. Για το (β) μπορείτε να υποθέσετε ότι το S δεν περιέχει το μηδενικό διάνυσμα (γιατί;). Έστω $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ και $u = v_1 + v_2 + \cdots + v_m$. Δείξτε ότι για κάθε $1 \leq i \leq m$ υπάρχει $\lambda_i \in \mathbb{F}$ τέτοιο ώστε $u - v_i = \lambda_i v_i$ και συνεπώς, ότι υπάρχει $\mu_i \in \mathbb{F}$ τέτοιο ώστε $u = \mu_i v_i$. Αφού μεταξύ των $v_1, v_2, \ldots, v_m$ υπάρχουν δύο γραμμικώς ανεξάρτητα, συμπεράνετε ότι $u = 0$.

(116) Υποθέστε ότι ο V είναι ίσος με την ένωση των γνήσιων υποχώρων του $W_1, W_2, \ldots, W_k$, κανένας από τους οποίους δεν περιέχεται στην ένωση των υπολοίπων. Επιλέξτε διανύσματα $v_0 \in V \setminus W_1$ και $v \in W_1 \setminus (W_2 \cup \cdots \cup W_k)$ και θεωρήστε το σύνολο $L = \{v_0 + \lambda v : \lambda \in \mathbb{F}\}$. Δείξτε ότι το σύνολο L είναι άπειρο, ότι $L \cap W_1 = \emptyset$ και ότι το L έχει το πολύ ένα κοινό στοιχείο με καθένα από τα $W_2, \ldots, W_k$ και καταλήξτε σε άτοπο.

(117) Έστω $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ και $v \in \mathcal{C}$. Γράψτε το v ως γραμμικό συνδυασμό $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i$ των στοιχείων της $\mathcal{B}$ και επιλέξτε ως u οποιοδήποτε από τα στοιχεία u_i της $\mathcal{B}$ με $\lambda_i \neq 0$, για το ερώτημα (α) και οποιοδήποτε από τα στοιχεία u_i της $\mathcal{B}$ με $\lambda_i \neq 0$ τα οποία δεν ανήκουν στη γραμμική θήκη του $\mathcal{C} \setminus \{v\}$, για το ερώτημα (β).

(118) Το πρόβλημα αυτό, δηλαδή ότι η πρόταση ισχύει για κάθε θετικό ακέραιο n, είναι γνωστό ως η *εικασία βάσης του Rota*. Είναι γνωστό ότι η πρόταση ισχύει στις ειδικές περιπτώσεις $n = 2^k p$ και $n = 2^k(p+1)$, όπου p είναι περιττός πρώτος (βλέπε [A. Drisko, Adv. Math. **128** (1997), 20–35], [A. Drisko, Electron. J. Combin. **5** (1998)] και [P. Zappa, Adv. in Appl. Math. **19** (1997), 31–44]). Από όσο είμαι σε θέση να γνωρίζω, το ερώτημα παραμένει ανοικτό στη γενική του περίπτωση.

(119) Απάντηση για το (β): $\ker(T) = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{F}^n : x_1 = \cdots = x_k = 0\}$, $\mathrm{Im}(T) = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{F}^n : x_{k+1} = \cdots = x_n = 0\}$, $\dim\ker(T) = n - k$ και $\dim\mathrm{Im}(T) = k$. Απάντηση για το (γ): η T είναι ισομορφισμός διανυσματικών χώρων αν και μόνο αν $k = n$. Απάντηση για το (δ): είναι ο διαγώνιος $n \times n$ πίνακας με στοιχεία $1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0$ στην κύρια διαγώνιο (k από τα οποία είναι ίσα με 1).

(120) Το (α) είναι εύκολο. Απάντηση για το (β): $\ker(T) = \{(x, x, \ldots, x) : x \in \mathbb{F}^n\}$, $\mathrm{Im}(T) = \{(y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{F}^n : y_1 + y_2 + \cdots + y_n = 0\}$, $\dim\ker(T) = 1$ και $\dim\mathrm{Im}(T) = n - 1$. Για το (γ), θεωρήστε την ορθογώνια προβολή $S(x)$ του $2x$ στην ευθεία $x_1 + x_2 = 0$ για $x \in \mathbb{R}^2$ και παρατηρήστε ότι η απεικόνιση $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ είναι γραμμικός μετασχηματισμός. Δείξτε ότι $S(u_1) = T(u_1)$ και $S(u_2) = T(u_2)$ για κάποια βάση $\{u_1, u_2\}$ του $\mathbb{R}^2$ (π.χ. επιλέξτε $u_1 = (1,1)^t$ και $u_2 = (1,-1)^t$) και συνάγετε ότι $S(x) = T(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^2$.

(121) Το (α) προκύπτει εύκολα από τη γραμμικότητα της T και από τον ορισμό του υπόχωρου (και θα πρέπει να σας είναι οικείο από τη θεωρία). Για το (β) παρατηρήστε ότι ο W έχει πεπερασμένη διάσταση, ως υπόχωρος ενός χώρου πεπερασμένης διάστασης. Έστω $n = \dim(W)$ και έστω $\{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ μια βάση του W. Παρατηρήστε ότι κάθε $w \in W$ είναι γραμμικός συνδυασμός των $w_1, w_2, \ldots, w_n$ και δείξτε ότι το $T(w)$ είναι ο αντίστοιχος γραμμικός συνδυασμός των $T(w_1), T(w_2), \ldots, T(w_n)$. Συμπεράνετε ότι τα $T(w_1), T(w_2), \ldots, T(w_n)$ παράγουν το χώρο $T(W)$ και συνάγετε ότι ισχύει $\dim T(W) \le n = \dim(W)$. Πιο συγκεκριμένες πληροφορίες για τη διαφορά $\dim(W) - \dim T(W)$ προκύπτουν από την Άσκηση 129.

(122) Από την υπόθεση προκύπτει ότι για κάθε $v \in V$ υπάρχει $\lambda_v \in \mathbb{F}$ με $T(v) = \lambda_v v$. Χρησιμοποιώντας τη γραμμικότητα της T, δείξτε ότι για τυχαία γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα u, v του V ισχύει $\lambda_u = \lambda_{u+v} = \lambda_v$ και συνάγετε ότι υπάρχει $\lambda \in \mathbb{F}$ τέτοιο ώστε $T(v) = \lambda v$ για κάθε $v \in V$.

(123) Υποθέστε ότι $\sum_{k=0}^{m-1} c_k T^k(x) = 0$ για κάποια $c_0, c_1, \ldots, c_{m-1} \in \mathbb{F}$. Εφαρμόστε την T^{m-1} στη σχέση αυτή και συμπεράνετε ότι $c_0 = 0$. Εφαρμόστε έπειτα την T^{m-2} και συμπεράνετε ότι $c_1 = 0$. Συνεχίστε παρόμοια για να δείξετε ότι $c_0 = c_1 = \cdots = c_{m-1} = 0$.

(124) Για το (α) εργασθείτε όπως στην Άσκηση 123: Θεωρήστε μια σχέση γραμμικής εξάρτησης μεταξύ των $x_1, x_2, \ldots, x_{2^k}$ και εφαρμόστε διαδοχικά σε αυτήν τις $T^{2^k}, T^{2^{k-1}}, \ldots, T$ για να δείξετε ότι η σχέση είναι τετριμμένη. Για το (β) υποθέστε ότι για κάθε θετικό ακέραιο m υπάρχει μη μηδενικό διάνυσμα $y_m \in \ker(T^m) \cap \mathrm{Im}(T^m)$. Θεωρήστε $x_m \in V$ τέτοιο ώστε $y_m = T^m(x_m)$ και παρατηρήστε ότι ισχύουν $T^m(x_m) \neq 0$ και $T^{2m}(x_m) = 0$ για κάθε m. Συνάγετε από το (α) ότι τα διανύσματα $x_1, x_2, x_4, \ldots, x_{2^k}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα για κάθε μη αρνητικό ακέραιο k και καταλήξτε σε άτοπο.

(125) Υποθέτουμε ότι $n \ge 2$ και εφαρμόζουμε επαγωγή στο n. Θεωρούμε μια γραμμική σχέση $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n = 0_V$ μεταξύ των $v_1, v_2, \ldots, v_n$, όπου $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{F}$. Εφαρμόζουμε την T σε αυτή την ισότητα, λαμβάνοντας υπόψην τις σχέσεις $T(v_1) = v_1$ και $T(v_i) = v_{i-1} + v_i$ για $2 \le i \le n$, αφαιρούμε από την ισότητα που προκύπτει την αρχική και καταλήγουμε στην ισότητα $\lambda_2 v_1 + \lambda_3 v_2 + \cdots + \lambda_n v_{n-1} = 0_V$. Από την υπόθεση της επαγωγής συμπεραίνουμε

ότι $\lambda_2, \ldots, \lambda_n = 0$ και συνεπώς ότι $\lambda_1 v_1 = 0_V$, οπότε $\lambda_1 = 0$. Έπεται η γραμμική ανεξαρτησία του $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$.

(126) Παρατηρήστε ότι τα $\{u_1, \ldots, u_n\}$ και $\{v_1, \ldots, v_n\}$ είναι βάσεις του V και συνεπώς ότι για τυχαία μη μηδενικά στοιχεία $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ του $\mathbb{F}$ υπάρχει γραμμικός ισομορφισμός $T : V \to V$ με $T(u_i) = \lambda_i v_i$ για $1 \le i \le n$. Έπειτα γράψτε $v_{n+1} = c_1 v_1 + \cdots + c_n v_n$ και $u_{n+1} = d_1 u_1 + \cdots + d_n u_n$ με $c_i, d_i \in \mathbb{F}$, δείξτε ότι όλοι οι συντελεστές c_i και d_i είναι μη μηδενικοί και επιλέξτε τα λ_i κατάλληλα ώστε να ισχύει $T(u_{n+1}) = v_{n+1}$. Για όσους γνωρίζουν την έννοια του προβολικού χώρου, η άσκηση αυτή δείχνει ότι σε προβολικό χώρο διάστασης $n-1$, οποιαδήποτε δύο σύνολα καθένα από τα οποία αποτελείται από $n+1$ σημεία σε γενική θέση είναι μεταξύ τους προβολικά ισοδύναμα.

(127) Το (α) είναι εύκολο. Για το (β) δείξτε ότι για κάθε $Y \in \mathbb{F}^{(m-1)\times(n-1)}$ υπάρχει μοναδικό $X \in V$ τέτοιο ώστε $T(X) = Y$. Το (γ) είναι άμεση συνέπεια του (β).

(128) Για το (α) χρησιμοποιήστε γνωστές ιδιότητες των πράξεων πινάκων. Για το (β) δείξτε ότι η απεικόνιση T είναι αντιστρέψιμη, με αντίστροφη την απεικόνιση $S : \mathbb{F}^{m\times n} \to \mathbb{F}^{m\times n}$ που ορίζεται θέτοντας $S(X) = A^{-1}X$ για $X \in \mathbb{F}^{m\times n}$. Για το (γ), υποθέστε ότι η T είναι ισομορφισμός και παρατηρήστε ότι $\dim(\mathbb{F}^{m\times n}) = \dim(\mathbb{F}^{p\times n})$ και ότι $\ker(T) = \{0\}$. Από την πρώτη ισότητα συνάγετε ότι $p = m$ και από τη δεύτερη και την Άσκηση 29 συμπεράνετε ότι ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος.

(129) Αποδείξτε το θεμελιώδες αυτό θεώρημα της γραμμικής άλγεβρας ως εξής: Έστω $\dim\ker(T) = k$ και $\dim(V) = n$. Θεωρήστε μια βάση $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ του πυρήνα $\ker(T)$ και επεκτείνετε αυτή σε βάση $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ του V. Δείξτε ότι τα $T(v_{k+1}), \ldots, T(v_n)$ παράγουν την εικόνα $\mathrm{Im}(T)$ (εύκολο) και ότι είναι γραμμικώς ανεξάρτητα και συνάγετε ότι $\dim\mathrm{Im}(T) = n - k = \dim(V) - \dim\ker(T)$.

(130) Για το (α) παρατηρήστε ότι αν $x \in \ker(ST)$, τότε $T(x) \in \ker(S)$. Για την πρώτη ισότητα του (β) παρατηρήστε ότι $\ker(T) \subseteq \ker(ST)$ και συνάγετε ότι $\ker(R) = \ker(ST) \cap \ker(T) = \ker(T)$. Για τη δεύτερη παρατηρήστε ότι $\mathrm{Im}(R) = \{T(x) : x \in \ker(ST)\}$ και συνάγετε το ζητούμενο. Για το (γ) εφαρμόστε την Άσκηση 129 στην R και χρησιμοποιήστε το (β).

(131) Το (α) προκύπτει από το (β) ή ευθέως από τη γραμμικότητα της T και τον ορισμό του υπόχωρου. Για το (β) παρατηρήστε ότι για $v \in V$ ισχύει $v \in \ker(S) \Leftrightarrow S(v) = 0 \Leftrightarrow \pi(T(v)) = 0 \Leftrightarrow T(v) \in W \Leftrightarrow v \in T^{-1}(W)$. Για το (γ) συμπεράνετε από το (δ) και την Άσκηση 129 ότι $\dim T^{-1}(W) = \dim\ker(S) = \dim(V) - \dim\mathrm{Im}(S) \ge \dim(V) - \dim(U/W) = \dim(V) - \dim(U) + \dim(W)$. Εναλλακτικά, θεωρήστε τον περιορισμό $T_\circ$ της T στο $T^{-1}(W)$. Παρατηρήστε ότι $\ker(T_\circ) = \ker(T)$ και ότι $\mathrm{Im}(T_\circ) = \mathrm{Im}(T) \cap W$ και συμπεράνετε ότι

$$\begin{aligned}
\dim T^{-1}(W) &= \dim\ker(T_\circ) + \dim\mathrm{Im}(T_\circ) = \dim\ker(T) + \dim(\mathrm{Im}(T) \cap W) \\
&= \dim(V) - \dim\mathrm{Im}(T) + \dim(\mathrm{Im}(T) \cap W) \\
&= \dim(V) - \dim(\mathrm{Im}(T) + W) + \dim(W) \\
&\ge \dim(V) - \dim(U) + \dim(W).
\end{aligned}$$

(132) Χρησιμοποιήστε τις σχέσεις $\dim(V_i) = \dim\ker(T_i) + \dim\mathrm{Im}(T_i) = \dim\mathrm{Im}(T_{i-1}) + \dim\mathrm{Im}(T_i)$ για $1 \le i \le m$.

(133) Για το (α) παρατηρήστε ότι $n = \dim(V) = \dim\ker(T) + \dim\mathrm{Im}(T) = 2\dim\ker(T)$. Για το (β) δείξτε ότι ο υπόχωρος $\ker(T)$ του V είναι S-αναλλοίωτος και ότι ο περιορισμός της S στον υπόχωρο αυτό ικανοποιεί τη συνθήκη του (α).

(134) Για τα (α) και (γ) χρησιμοποιήστε την Άσκηση 11, καθώς και γνωστές ιδιότητες των πράξεων πινάκων. Για το (β), παρατηρήστε ότι από την υπόθεση ισχύει $\mathrm{tr}(AX) = 0$ για κάθε $X \in \mathbb{F}^{n\times m}$. Γράφοντας $A = (a_{ij})$, δείξτε ότι ισχύει

$\mathrm{tr}(AE_{ij}) = a_{ji}$ για $1 \le i \le n$ και $1 \le j \le m$ και συνάγετε ότι $A = O$. Τέλος, παρατηρήστε ότι το αποτέλεσμα του (β) γράφεται ισοδύναμα ως $\ker(T) = \{0\}$, οπότε η T είναι μονομορφισμός διανυσματικών χώρων. Λαμβάνοντας υπόψην ότι $\dim(\mathbb{F}^{m\times n}) = \dim(\mathbb{F}^{n\times m})^* = mn$, συμπεράνετε ότι η T είναι και επιμορφισμός και επομένως ότι ισχύει το (δ).

(135) Το (α) είναι εύκολο. Από τη σχέση $B = PA$ προκύπτει ότι $Ax = 0 \Rightarrow Bx = 0$ και από την $A = P^{-1}B$ ότι $Bx = 0 \Rightarrow Ax = 0$. Για το (β) εργασθείτε ως εξής: Έστω $L_A, L_B : \mathbb{F}^{n\times 1} \to \mathbb{F}^{m\times 1}$ οι γραμμικές απεικονίσεις με $L_A(x) = Ax$ και $L_B(x) = Bx$ για $x \in \mathbb{F}^{n\times 1}$. Από την υπόθεση γνωρίζουμε ότι $\ker(L_A) = \ker(L_B)$. Επεκτείνετε μια τυχαία βάση $(u_1, u_2, \dots, u_k)$ του $\ker(L_A) = \ker(L_B)$ σε μια βάση $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ του $\mathbb{F}^{n\times 1}$. Υπενθυμίζεται ότι τα $L_A(u_i)$ για $k+1 \le i \le n$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα του $\mathbb{F}^{m\times 1}$ (και αποτελούν βάση της εικόνας $\mathrm{Im}\, L_A$) και ομοίως για τα $L_B(u_i)$ για $k+1 \le i \le n$. Θεωρήστε τυχαία αντιστρέψιμη γραμμική απεικόνιση $T : \mathbb{F}^{m\times 1} \to \mathbb{F}^{m\times 1}$ τέτοια ώστε $T(L_A(x)) = L_B(x)$ για κάθε $x \in \{u_{k+1}, \dots, u_n\}$ και δείξτε ότι $T(L_A(x)) = L_B(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{F}^{n\times 1}$. Συνάγετε ότι $PA = B$, όπου $P \in \mathbb{F}^{m\times m}$ είναι ο αντιστρέψιμος πίνακας με $T(y) = Py$ για κάθε $y \in \mathbb{F}^{m\times 1}$.

(136) Για το (α) θυμηθείτε ότι η T είναι μονομορφισμός αν και μόνο αν $\ker(T) = \{0\}$ και χρησιμοποιήστε την Άσκηση 129. Για το (β) παρατηρήστε ότι $\mathrm{Im}(T) \subseteq W$ και συνεπώς ότι $\mathrm{Im}(T) = W \Leftrightarrow \dim \mathrm{Im}(T) = \dim(W)$. Το (γ) έπεται από τα (α) και (β).

(137) Παρατηρώντας ότι $\mathrm{Im}(ST) \subseteq \mathrm{Im}(S)$ βρίσκουμε ότι $\mathrm{rank}(ST) \le \mathrm{rank}(S)$. Έχουμε επίσης $\mathrm{Im}(ST) = S(\mathrm{Im}(T))$ και συνεπώς $\mathrm{rank}(ST) = \dim \mathrm{Im}(ST) = \dim \mathrm{Im}(T) - \dim \ker(S) \cap \mathrm{Im}(T) \le \dim \mathrm{Im}(T) = \mathrm{rank}(T)$, άρα ισχύει το (α). Το (β) προκύπτει εφαρμόζοντας το (α) στις γραμμικές απεικονίσεις $L_A : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$ και $L_B : \mathbb{F}^p \to \mathbb{F}^n$.

(138) Για το (α) παρατηρήστε ότι $\mathrm{Im}(S+T) \subseteq \mathrm{Im}(S) + \mathrm{Im}(T)$. Για το (β) γράψτε την προτεινόμενη ανισότητα ως $n - \mathrm{rank}(S) \ge \mathrm{rank}(T) - \mathrm{rank}(ST)$ και παρατηρήστε ότι $n - \mathrm{rank}(S) = \dim \ker(S)$ και ότι $\mathrm{rank}(T) - \mathrm{rank}(ST) = \dim \mathrm{Im}(T) \cap \ker(S)$. Εργαστείτε παρόμοια για το (γ) και γράψτε την προτεινόμενη ανισότητα ως $\mathrm{rank}(R) - \mathrm{rank}(SR) \ge \mathrm{rank}(RT) - \mathrm{rank}(SRT)$. Παρατηρήστε ότι $\mathrm{rank}(R) - \mathrm{rank}(SR) = \dim \mathrm{Im}(R) \cap \ker(S)$ και ότι $\mathrm{rank}(RT) - \mathrm{rank}(SRT) = \dim \mathrm{Im}(RT) \cap \ker(S)$. Προφανώς το (β) προκύπτει από το (γ) όταν η $R : V \to V$ είναι η ταυτοτική απεικόνιση.

(139) Απάντηση: $\lfloor n/2 \rfloor$ για το (α) και $\lfloor 2n/3 \rfloor$ για το (β). Έστω $L_A : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n$ η γραμμική απεικόνιση με $L_A(x) = Ax$ για $x \in \mathbb{F}^n$. Για το (α) εφαρμόστε το (β) της Άσκησης 138 για $S = L_A$ και δώστε παράδειγμα πίνακα A με $A^2 = O$ και τάξη ίση με $\lfloor n/2 \rfloor$. Παρόμοια, για το (β) εφαρμόστε το (β) της Άσκησης 138 για $S = L_A$ και $S = L_A^2$.

(140) Το (α) είναι εύκολο (χρησιμοποιήστε τη γραμμικότητα της S). Για το (β) παρατηρήστε ότι η $S + T$ είναι η ταυτοτική απεικόνιση πάνω στο V και εφαρμόστε την Άσκηση 138 (α). Για το (γ) θεωρήστε τους υπόχωρους $U = \mathrm{Im}(S)$ και $W = \mathrm{Im}(T)$ του V. Παρατηρήστε ότι για κάθε $x \in V$ έχουμε $x = S(x) + T(x) \in U + W$ και συνάγετε ότι $U + W = V$, επομένως ότι $V = U \oplus W \Leftrightarrow U \cap W = \{0\} \Leftrightarrow \dim(U) + \dim(W) = n$. Από το τελευταίο συμπεράνετε ότι (i) $\Leftrightarrow$ (ii) $\Leftrightarrow$ (iii). Χρησιμοποιώντας το (α), δείξτε ότι $\mathrm{Im}(ST) = \mathrm{Im}(TS) \subseteq \mathrm{Im}(S) \cap \mathrm{Im}(T)$ και συνάγετε ότι (ii) $\Rightarrow$ (iv). Παρατηρήστε ότι $\ker(T) = \mathrm{Fix}(S)$ και $\ker(S) = \mathrm{Fix}(T)$ και συνάγετε ότι οι συνεπαγωγές (vi) $\Rightarrow$ (iv) και (vi) $\Rightarrow$ (v) προκύπτουν από το (α) της Άσκησης 149. Τέλος δείξτε ότι (iv) $\Rightarrow$ (iii) και (v) $\Rightarrow$ (iii) παρατηρώντας ότι $\dim \ker(T) = n - \mathrm{rank}(T)$ και $\dim \ker(S) = n - \mathrm{rank}(S)$, αντίστοιχα. Για τα (δ) και (ε) εφαρμόστε τα παραπάνω στο γραμμικό μετασχηματισμό $S = L_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

(141) Για το (α) δείξτε ότι $\operatorname{rank}(AB) - \operatorname{rank}(BA) \le \operatorname{rank}(A)$ και, με χρήση του (β) της Άσκησης 138, ότι $\operatorname{rank}(AB) - \operatorname{rank}(BA) \le n - \operatorname{rank}(A)$. Για το (β), βρείτε πρώτα τέτοιους πίνακες για $n = 2$. Για το (γ) χρησιμοποιήστε πρώτα το (α) της Άσκησης 138 για να δείξετε ότι $\operatorname{rank}(A) \ge n/2$ και $\operatorname{rank}(B) \ge n/2$ και έπειτα το (β) της ίδιας άσκησης για να δείξετε ότι $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(B) = n/2$.

(142) Θέτουμε $u = (a_1\ a_2\ \cdots\ a_n)^t \in \mathbb{C}^n$, $P = (x_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ με $x_{ij} = x_{ji}$ και

$$X = (x_{11}\ x_{12}\ \cdots\ x_{1n}\ x_{22}\ \cdots\ x_{nn})^t \in \mathbb{C}^{\frac{n(n+1)}{2}}.$$

Γράψτε την ισότητα $Pu = v$ ως ένα γραμμικό σύστημα $QX = B$, όπου Q είναι $n \times \frac{n(n+1)}{2}$ πίνακας τα στοιχεία του οποίου εξαρτώνται από τα $a_1, a_2, \dots, a_n$. Δείξτε ότι οι γραμμές του Q είναι γραμμικώς ανεξάρτητες αν τα $a_1, a_2, \dots, a_n$ δεν είναι όλα ίσα με μηδέν και συνάγετε από την Άσκηση 78 ότι το σύστημα $QX = B$ έχει μία τουλάχιστον λύση.

(143) Έστω $\mathcal{B}$ και $\mathcal{C}$ οι δοσμένες βάσεις των V και W, αντίστοιχα. Θεωρήστε το γραμμικό ισομορφισμό $\phi : V \to \mathbb{F}^n$ που απεικονίζει το $v \in V$ στη στήλη των συντεταγμένων του v ως προς τη βάση $\mathcal{B}$ και το γραμμικό ισομορφισμό $\psi : W \to \mathbb{F}^m$ που απεικονίζει το $w \in W$ στη στήλη των συντεταγμένων του w ως προς τη βάση $\mathcal{C}$. Θυμηθείτε ότι ισχύει $\psi(T(v)) = Ax$ για κάθε $v \in V$, όπου $x = \phi(v)$ (θεμελιώδης ιδιότητα του πίνακα μιας γραμμικής απεικόνισης). Συμπεράνετε ότι $\psi \circ T = L_A \circ \phi$ και συνεπώς ότι $\psi(\operatorname{Im}(T)) = \operatorname{Im}(L_A)$. Συνάγετε από το τελευταίο ότι $\operatorname{rank}(T) = \dim \operatorname{Im}(T) = \dim \operatorname{Im}(L_A) = \operatorname{rank}(A)$, δηλαδή ότι ισχύει το (α). Τα υπόλοιπα ερωτήματα προκύπτουν από το (α) και την Άσκηση 136.

(144) Για το (α) χρησιμοποιήστε γνωστές ιδιότητες της παραγώγου. Για τα (β) και (γ) παρατηρήστε ότι ο πίνακας της T ως προς τη βάση $(1, x, x^2, \dots, x^n)$ του V_n είναι άνω τριγωνικός και ότι τα διαγώνια στοιχεία του είναι ίσα με 1. Συνάγετε από την Άσκηση 143 (δ) ότι η T είναι αντιστρέψιμη για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και ότι το ίχνος της είναι ίσο με $n + 1$. Για τα (γ) και (δ), λύνοντας το αντίστοιχο γραμμικό σύστημα δείξτε ότι για $0 \le k \le n$, το μοναδικό $f_k(x) \in V$ με $T(f_k(x)) = x^k$ είναι το πολυώνυμο $f_k(x) = k!\ \sum_{i=0}^k x^i/i!$. Για το (δ) συνάγετε ότι $f(x) = \sum_{i=0}^n f_k(x)$ και συνεπώς ότι $f(0) = 0! + 1! + \cdots + n!$.

(145) Αναδιατάσοντας ως $(E_{11}, E_{21}, \dots, E_{m1}, E_{12}, \dots, E_{mn})$ τα στοιχεία της συνήθους βάσης του $\mathbb{F}^{m\times n}$ και ως $(E_{11}, E_{21}, \dots, E_{p1}, E_{12}, \dots, E_{pn})$ εκείνα της συνήθους βάσης του $\mathbb{F}^{p\times n}$, δείξτε ότι ο πίνακας της T παίρνει τη μορφή

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} A & O & \cdots & O \\ O & A & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \cdots & A \end{pmatrix}.$$

Συμπεράνετε από την Άσκηση 143 (α) ότι $\operatorname{rank}(T) = n \operatorname{rank}(A)$ και ότι ισχύει το (δ). Για το (γ) χρησιμοποιήστε την Άσκηση 136 (γ) και το (β).

(146) Για το (α) χρησιμοποιήστε γνωστές ιδιότητες των πράξεων πινάκων. Για το (β) δείξτε πρώτα ότι αν οι πίνακες A και B είναι αντιστρέψιμοι (οπότε $p = m$ και $q = n$), τότε η $T : \mathbb{F}^{m\times n} \to \mathbb{F}^{m\times n}$ είναι επίσης αντιστρέψιμη και ότι η αντίστροφη απεικόνιση ορίζεται από τον τύπο $T^{-1}(X) = A^{-1}XB^{-1}$ για $X \in \mathbb{F}^{m\times n}$. Για το αντίστροφο παρατηρήστε πρώτα ότι $T = R \circ S = S' \circ R'$, όπου $S : \mathbb{F}^{m\times n} \to \mathbb{F}^{p\times n}$ και $R' : \mathbb{F}^{m\times n} \to \mathbb{F}^{m\times q}$ είναι οι απεικονίσεις που ορίζονται θέτοντας $S(X) = AX$ και $R'(X) = XB$ για $X \in \mathbb{F}^{m\times n}$ και $R : \mathbb{F}^{p\times n} \to \mathbb{F}^{p\times q}$ και $S' : \mathbb{F}^{m\times q} \to \mathbb{F}^{p\times q}$ είναι οι απεικονίσεις που ορίζονται θέτοντας $R(Y) = YB$ και $S'(Y) = AY$ για $Y \in \mathbb{F}^{p\times n}$ και $Y \in \mathbb{F}^{m\times q}$, αντίστοιχα. Υποθέστε ότι η T είναι ι-σομορφισμός διανυσματικών χώρων, οπότε $\operatorname{rank}(T) = \dim(\mathbb{F}^{m\times n}) = \dim(\mathbb{F}^{p\times q})$. Από τις ισότητες $T = R \circ S = S' \circ R'$ και την Άσκηση 137 συμπεράνετε ότι

rank$(T) \le$ rank$(S) \le pn$ και rank$(T) \le$ rank$(R') \le mq$. Από τα παραπάνω συνάγετε ότι $pq = mn \le pn, mq$ και συνεπώς ότι $p = m$ και $q = n$. Τέλος, από τη σχέση $\ker(T) = \{0\}$ και την Άσκηση 29 συνάγετε ότι $\ker(S) = \ker(R') = \{0\}$ και ότι οι πίνακες A και B είναι αντιστρέψιμοι. Για το (γ) γράψτε $A = (a_{ij})$ και $B = (b_{ij})$ και υπολογίστε ότι

$$T(E_{ij}) \;=\; AE_{ij}B = \left(\sum_{k=1}^{p}\sum_{\ell=1}^{m} a_{k\ell}E_{k\ell}\right)E_{ij}\left(\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{q} b_{rs}E_{rs}\right) \;=\; \sum_{k=1}^{p}\sum_{s=1}^{q} a_{ki}b_{js}E_{ks}.$$

Συνάγετε ότι ο πίνακας της T ως προς τις διατεταγμένες βάσεις

$(E_{11}, E_{21}, \ldots, E_{m1}, E_{12}, \ldots, E_{mn})$ και
$(E_{11}, E_{21}, \ldots, E_{p1}, E_{12}, \ldots, E_{pq})$

των $\mathbb{F}^{m\times n}$ και $\mathbb{F}^{p\times q}$, αντίστοιχα, είναι ο

$$C \;=\; \begin{pmatrix} b_{11}A & b_{21}A & \cdots & b_{n1}A \\ b_{12}A & b_{22}A & \cdots & b_{n2}A \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{1q}A & b_{2q}A & \cdots & b_{nq}A \end{pmatrix}.$$

Για το (δ) παρατηρήστε (για $p = m$ και $q = n$) ότι $\mathrm{tr}(C) = \mathrm{tr}(A)\mathrm{tr}(B)$ και (βλέπε Άσκηση 60) ότι $\det(C) = (\det(A))^n(\det(B))^m$. Δώστε μια διαφορετική απόδειξη για την τελευταία ισότητα παρατηρώντας ότι $\det(T) = \det(R \circ S) = \det(R)\det(S)$ (όπου οι απεικονίσεις R και S ορίστηκαν παραπάνω), συνάγοντας από την Άσκηση 145 ότι $\det(S) = (\det(A))^n$ και δείχνοντας με παρόμοιο τρόπο ότι $\det(R) = (\det(B))^m$.

(147) Αφού ο συντελεστής του S στο $\varphi_n(S)$ είναι ίσος με $(-1)^{|S|}$, έχουμε

$$\mathrm{tr}(\varphi_n) \;=\; \sum_{S\subseteq[n]} (-1)^{|S|} \;=\; \sum_{k=0}^{n} (-1)^k\binom{n}{k} \;=\; 0$$

για κάθε $n \ge 1$. Θεωρούμε τώρα την αντίστροφη λεξικογραφική διάταξη της δοσμένης βάσης του V_n. Για παράδειγμα, για $n = 3$ η διάταξη αυτή είναι η $\varnothing < \{1\} < \{2\} < \{1,2\} < \{3\} < \{1,3\} < \{2,3\} < \{1,2,3\}$. Συμβολίζουμε με A_n τον πίνακα της φ_n ως προς αυτή τη διατεταγμένη βάση. Παρατηρούμε ότι

$$A_n \;=\; \begin{pmatrix} A_{n-1} & A_{n-1} \\ A_{n-1} & -A_{n-1} \end{pmatrix}$$

για $n \ge 1$. Αφαιρώντας την πρώτη στήλη από τη δεύτερη βρίσκουμε ότι

$$\det(A_n) \;=\; \det\begin{pmatrix} A_{n-1} & O \\ A_{n-1} & -2A_{n-1} \end{pmatrix} \;=\; (-2)^{2^{n-1}}(\det(A_{n-1}))^2$$

για $n \ge 1$. Με επαγωγή στο n βρίσκουμε ότι $\det(\varphi_n) = \det(A_n) = 2^{2^{n-1}n}$ για $n \ge 2$, όπου $\det(A_0) = 1$ και $\det(A_1) = -2$, και συμπεραίνουμε ότι η φ_n είναι αντιστρέψιμη για κάθε $n \ge 1$.

(148) Το (α) και (β) είναι εύκολα (χρησιμοποιήστε τη γραμμικότητα του T). Για το (γ) θεωρήστε το γραμμικό μετασχηματισμό $S : V \to V$ με $S(x) = x - T(x)$ για $x \in V$, παρατηρήστε ότι $\ker(S) = \mathrm{Fix}(T)$ και θυμηθείτε ότι ένας γραμμικός μετασχηματισμός S ενός διανυσματικού χώρου πεπερασμένης διάστασης είναι μονομορφισμός αν και μόνο αν ο S είναι επιμορφισμός. Για το (δ), υποθέτοντας ότι $\dim \mathrm{Fix}(T) \ge k$, θεωρήστε τυχαία βάση του $\mathrm{Fix}(T)$ και επεκτείνετέ την σε βάση του V. Αντιστρόφως, αν υπάρχει βάση $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ του V με τη δοσμένη ιδιότητα, δείξτε ότι τα $u_1, u_2, \ldots, u_k$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα στοιχεία του $\mathrm{Fix}(T)$ και συνάγετε ότι $\dim \mathrm{Fix}(T) \ge k$. Για το (ε) θεωρήστε π.χ. τη γραμμική απεικόνιση $T : \mathbb{F}[t] \to \mathbb{F}[t]$ που ορίζεται θέτοντας $T(p(t)) = tp(t)$, για $p(t) \in \mathbb{F}[t]$.

(149) Από τη σχέση $T(T(x)) = T(x)$ προκύπτει ότι $\mathrm{Im}(T) \subseteq \mathrm{Fix}(T)$. Ο αντίστροφος εγκλεισμός $\mathrm{Fix}(T) \subseteq \mathrm{Im}(T)$ είναι προφανής. Συνεπώς ισχύει το (α). Για το (β) παρατηρήστε ότι η σχέση $T(T(x)) = T(x)$ γράφεται ισοδύναμα $T(x - T(x)) = 0$, ή $x - T(x) \in \ker(T)$. Από την τελευταία ισότητα συνάγετε ότι $V = \ker(T) + \mathrm{Im}(T) = \ker(T) + \mathrm{Fix}(T)$ και παρατηρήστε ότι $\ker(T) \cap \mathrm{Fix}(T) = \{0\}$. Για το (γ) επιλέξτε τυχαίες βάσεις των $\mathrm{Fix}(T)$ και $\ker(T)$ και χρησιμοποιήστε τη συνεπαγωγή (i) ⇒ (iv) της Άσκησης 109 για να ορίσετε την επιθυμητή βάση του V.

(150) Για το (α) παρατηρήστε ότι η απεικόνιση T είναι αντιστρέψιμη με αντίστροφη απεικόνιση τον εαυτό της. Για το (β) χρησιμοποιήστε τη γραμμικότητα της T και την υπόθεση $T(T(x)) = x$. Για το (γ) παρατηρήστε πρώτα ότι ισχύει $x = (x + T(x))/2 + (x - T(x))/2$ για κάθε $x \in V$ και χρησιμοποιήστε το (β) για να συμπεράνετε ότι $V = \mathrm{Fix}(T) + U$. Έπειτα δείξτε ότι $\mathrm{Fix}(T) \cap U = \{0\}$. Για το (δ) θεωρήστε μια βάση του $\mathrm{Fix}(T)$ και μια βάση του U και χρησιμοποιήστε το (γ) και την Άσκηση 109 για να δείξετε ότι η ένωση των δύο είναι βάση του V με τη ζητούμενη ιδιότητα.

(151) Για το (α) παρατηρήστε ότι η T είναι αντιστρέψιμη απεικόνιση, με αντίστροφη $T^{-1} = -T$. Για το (β) υποθέστε ότι τα x και $T(x)$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα για κάποιο μη μηδενικό διάνυσμα $x \in V$ και συμπεράνετε ότι $T(x) = \lambda x$ για κάποιο $\lambda \in \mathbb{R}$. Συνάγετε ότι $-x = T(T(x)) = T(\lambda x) = \lambda T(x) = \lambda^2 x$ και καταλήξτε στο άτοπο $\lambda^2 = -1$. Για το (γ) δείξτε πρώτα την εξής βοηθητική πρόταση: Αν τα $u_1, \ldots, u_k, T(u_1), \ldots, T(u_k)$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα του V και το $u \in V$ δεν ανήκει στη γραμμική θήκη αυτών, τότε τα $u_1, \ldots, u_k, u, T(u_1), \ldots, T(u_k), T(u)$ είναι επίσης γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα του V (παρατηρήστε ότι το ερώτημα (β) ισοδυναμεί με την περίπτωση $k = 0$). Το ζητούμενο προκύπτει εύκολα από την πρόταση. Για την απόδειξη της πρότασης, υποθέστε ότι ισχύει

$$\lambda u + \mu T(u) \; + \; \sum_{i=1}^{k} \lambda_i u_i \; + \; \sum_{i=1}^{k} \mu_i T(u_i) \; = \; 0$$

για κάποια $\lambda, \mu, \lambda_i, \mu_i \in \mathbb{R}$. Υποθέτοντας ότι οι λ και μ δεν είναι και οι δύο ίσοι με μηδέν, εφαρμόστε την T στην παραπάνω σχέση και δείξτε ότι το u είναι γραμμικός συνδυασμός των $u_1, \ldots, u_k, T(u_1), \ldots, T(u_k)$, σε αντίθεση με την υπόθεση. Συμπεράνετε ότι $\lambda = \mu = 0$ και συνεπώς ότι $\lambda_i = \mu_i = 0$ για $1 \le i \le k$. Για το (δ) χρησιμοποιήστε τη βάση που προκύπτει από το ερώτημα (γ).

(152) Παρατηρήστε πρώτα ότι $V \supseteq W_1 \supseteq W_2 \supseteq \cdots$. Για το (α) δείξτε ότι αν $\dim(W_{i+1}) = \dim(W_i)$, τότε $W_{i+1} = W_i$ και ότι $W_k = W_i$ για κάθε $k \ge i$, σε αντίφαση με την υπόθεση $W_m = \{0\}$. Για το (β), έστω ότι $T^m = O$, δηλαδή ότι $W_m = \{0\}$, και ότι ο m είναι ο μικρότερος θετικός ακέραιος με αυτή την ιδιότητα. Χρησιμοποιώντας το (α), επιλέξτε μια βάση του W_{m-1} και επεκτείνετε αυτή διαδοχικά σε βάσεις των $W_{m-2}, \ldots, W_1$ και V. Δείξτε ότι η βάση του V που προκύπτει έχει τη ζητούμενη ιδιότητα. Το αντίστροφο προκύπτει από την Άσκηση 9 (δ). Για το (γ) επιλέξτε διάνυσμα $v \in V$ ώστε $T^{n-1}(v) \neq 0$ και συνάγετε από την Άσκηση 123 ότι το σύνολο $\{v, T(v), T^2(v), \ldots, T^{n-1}(v)\}$ είναι βάση του V. Για το (δ) χρησιμοποιήστε το (α) ή το (β) και την Άσκηση 9 (δ).

(153) Για το (α) παρατηρήστε ότι $B = P^{-1}AP$ για κάποιον αντιστρέψιμο πίνακα $P \in \mathbb{F}^{n\times n}$, οπότε $B = P^{-1}(\lambda I)P = \lambda(P^{-1}P) = \lambda I = A$. Για το (β) υποθέστε ότι ο μόνος πίνακας $B \in \mathbb{F}^{n\times n}$ που είναι όμοιος με τον A είναι ο $B = A$ και δείξτε ότι ο A πρέπει να είναι της μορφής $A = \lambda I$ ως εξής: Παρατηρήστε ότι για κάθε αντιστρέψιμο πίνακα $P \in \mathbb{F}^{n\times n}$, ο πίνακας $P^{-1}AP$ είναι όμοιος με τον A.

Από την υπόθεσή μας προκύπτει ότι $P^{-1}AP = A$, δηλαδή $AP = PA$, για κάθε αντιστρέψιμο πίνακα $P \in \mathbb{F}^{n\times n}$. Το ζητούμενο έπεται από την Άσκηση 18 (δ).

(154) Έστω ότι $B = P^{-1}AP$ για κάποιον αντιστρέψιμο πίνακα $P \in \mathbb{F}^{n\times n}$. Για την ισότητα $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(B)$ του (α) χρησιμοποιήστε τις ιδιότητες του ίχνους (μέρος (α) της Άσκηση 11). Για την ισότητα $\det(A) = \det(B)$, συμπεράνετε από γνωστές ιδιότητες της ορίζουσας ότι $\det(B) = \det(P^{-1})\det(A)\det(P)$ και ότι $\det(P^{-1})\det(P) = 1$ και καταλήξτε στο ζητούμενο. Η ισότητα $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(B)$ είναι ειδική περίπτωση της Άσκησης 137 (δ). Για το (β) παρατηρήστε ότι αν $B = P^{-1}AP$, τότε $B^m = P^{-1}A^mP$ για κάθε $m \in \mathbb{N}$. Για το (γ) συνάγετε ότι αν $B = P^{-1}AP$, τότε $\phi(B) = P^{-1}\phi(A)P$ για κάθε πολυώνυμο $\phi(x) \in \mathbb{F}[x]$. Για το (δ) επιλέξτε πίνακα $C \neq O$ με $C^2 = O$ και $D = O$ για να δείξετε ότι η απάντηση είναι αρνητική.

(155) Για το (α) παρατηρήστε ότι $C^2 = O$ και ότι $C \neq O$ και συνάγετε ότι αν $A = PCP^{-1}$, τότε $A^2 = PC^2P^{-1} = O$ και $A \neq O$. Για τα (β) και (γ) θεωρήστε το γραμμικό μετασχηματισμό $T = L_A : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n$ με $T(x) = Ax$ για $x \in \mathbb{F}^n$. Το (β) προκύπτει εφαρμόζοντας την ειδική περίπτωση $n = 2$ της Άσκησης 152 (γ) στο μετασχηματισμό T, ή με τρόπο ανάλογο με τον ακόλουθο για το ερώτημα (γ). Για το (γ), υποθέστε ότι ο $A \in \mathbb{F}^{3\times 3}$ είναι μη μηδενικός πίνακας με $A^2 = O$. Παρατηρήστε τότε ότι $T \neq 0$ και ότι $T^2 = 0$, και συμπεράνετε ότι $\mathrm{Im}(T) \subseteq \ker(T)$. Αφού οι διαστάσεις των $\mathrm{Im}(T)$ και $\ker(T)$ έχουν άθροισμα 3 (Άσκηση 129) και $\mathrm{Im}(T) \neq \{0\}$, συμπεράνετε ότι $\dim \mathrm{Im}(T) = 1$ και $\dim \ker(T) = 2$. Επιλέξτε τώρα μη μηδενικό διάνυσμα $u \in \mathrm{Im}(T)$, επεκτείνετε σε διατεταγμένη βάση (u, v) του $\ker(T)$ και θεωρήστε διάνυσμα $w \in \mathbb{F}^3$ με $T(w) = u$. Τέλος, παρατηρώντας ότι $w \notin \ker(T)$, δείξτε ότι η τριάδα (u, v, w) είναι διατεταγμένη βάση του $\mathbb{F}^n$ ως προς την οποία ο πίνακας της T είναι ίσος με C και συνάγετε το ζητούμενο. Για το (δ) δώστε αρνητική απάντηση, θέτοντας

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

και παρατηρώντας ότι $A^2 = O$ και ότι $\mathrm{rank}(A) = 2$.

(156) Δείξτε ότι η απάντηση είναι αρνητική και στις δύο περιπτώσεις ως εξής: Υποθέστε ότι οι δοσμένοι πίνακες, έστω A και B, είναι όμοιοι. Για το (α), συμπεράνετε από το μέρος (γ) της Άσκησης 154 (ή χρησιμοιποιώντας απευθείας τον ορισμό της ομοιότητας ή άλλον τρόπο) ότι οι $A - I$ και $B - I$ είναι επίσης όμοιοι και από το (α) της ίδιας άσκησης ότι $\mathrm{rank}(A - I) = \mathrm{rank}(B - I)$ και καταλήξτε σε άτοπο. Για το (β) εργασθείτε παρόμοια με τους πίνακες $(A - I)^2$ και $(B - I)^2$.

(157) Για το (α) παρατηρήστε ότι $J_r^2 = J_r$ και συνάγετε ότι αν $A = P^{-1}J_rP$, τότε $A^2 = P^{-1}J_r^2P = P^{-1}J_rP = A$. Για το (β) εφαρμόστε την Άσκηση 149 στο γραμμικό μετασχηματισμό $T = L_A$.

(158) Για το (α) παρατηρήστε ότι $J_k^2 = I$ και συνάγετε ότι αν $A = P^{-1}J_kP$, τότε $A^2 = P^{-1}J_k^2P = P^{-1}P = I$. Για το (β) εφαρμόστε την Άσκηση 150 στο γραμμικό μετασχηματισμό $T = L_A$. Για το (γ) δείξτε ότι το ερώτημα έχει αρνητική απάντηση, θεωρώντας το σώμα $\mathbb{F} = \{0, 1\}$ με δύο στοιχεία και τον πίνακα $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{2\times 2}$.

(159) Για το (α) παρατηρήστε ότι $J_m^2 = -I$ και συνάγετε ότι αν $A = P^{-1}J_mP$, τότε $A^2 = P^{-1}J_m^2P = P^{-1}(-I)P = -I$. Για το (β) εφαρμόστε την Άσκηση 151 στο γραμμικό μετασχηματισμό $T = L_A$.

(160) Θεωρήστε τη γραμμική απεικόνιση $T = L_{A_n(\lambda)} : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n$ με $T(x) = A_n(\lambda)\,x$, οπότε $T(e_1) = e_1$ και $T(e_i) = \lambda e_{i-1} + e_i$ για $2 \le i \le n$. Βρείτε μια βάση του $\mathbb{F}^n$ της μορφής $(c_1e_1, c_2e_2, \ldots, c_ne_n)$, όπου $c_i \in \mathbb{F}\smallsetminus\{0\}$, ως προς την οποία ο πίνακας της T είναι ίσος με $A_n(\mu)$ και συνάγετε το ζητούμενο.

(161) Γενικότερα, γνωρίζουμε από τη θεωρία ότι το $\chi_A(x)$ διαιρείται μετο $(x - \lambda)^k$, αν λ είναι ιδιοτιμή του A με αντίστοιχο ιδιοχώρο διάστασης k. Για το (α), εφαρμόστε την πρόταση αυτή για $\lambda = 0$. Για το (β), εφαρμόστε το (α) για να συμπεράνετε ότι $\chi_A(x) = (-x)^{n-1}(x - c)$ για κάποιο $c \in \mathbb{F}$ και δείξτε ότι $c = \mathrm{tr}(A)$.

(162) Για το (α) παρατηρήστε ότι ο πίνακας J έχει τάξη 1 και ίχνος p, οπότε $\chi_J(x) = (-x)^{p-1}(p - x)$ (Άσκηση 161). Παρατηρήστε επίσης ότι ο πίνακας $J + qI_p$ έχει χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\det(J + (q - x)I_p) = \chi_J(x - q)$ και συμπεράνετε ότι αυτό είναι ίσο με $(q - x)^{p-1}(p + q - x)$. Έστω A ο πίνακας του ερωτήματος (β). Προσθέστε όλες τις γραμμές του $A - xI_{p+q}$ εκτός της πρώτης στην πρώτη γραμμή και αφαιρέστε την πρώτη στήλη του πίνακα που προέκυψε από καθεμία από τις υπόλοιπες στήλες για να συμπεράνετε ότι $\chi_A(x) = (-x)(p - x)^{q-1}\det(J + (q - x)I_p)$. Από το αποτέλεσμα του ερωτήματος (α) προκύπτει ότι $\chi_A(x) = (-x)(p + q - x)(p - x)^{q-1}(q - x)^{p-1}$.

(163) Για το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A_n έχουμε

$$\chi_A(x) = \det(A_n - xI) = \det\begin{pmatrix} 1-x & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1-x & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1-x & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 1-x \end{pmatrix}.$$

Αναπτύσσοντας την ορίζουσα κατά τα στοιχεία της πρώτης στήλης (ή με άλλο τρόπο), δείξτε ότι $\chi_A(x) = (1 - x)^n + (-1)^{n-1}$ και συνάγετε ότι ο A_n είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν ο n είναι περιττός.

(164) Χρησιμοποιήστε τις ισότητες

$$\begin{pmatrix} xI_n & O \\ A & I_m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n & -B \\ -A & xI_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xI_n & -xB \\ O & xI_m - AB \end{pmatrix}$$

και

$$\begin{pmatrix} I_n & -B \\ -A & xI_m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} xI_n & O \\ A & I_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xI_n - BA & -B \\ O & xI_m \end{pmatrix}$$

καθώς και ιδιότητες των οριζουσών.

(165) Για το (α) παρατηρήστε ότι

$$\chi_{A^{-1}}(x) = \det(A^{-1} - xI) = \det(A^{-1})\det(I - xA) = \det(A^{-1})\,(-x)^n\det(A - \frac{1}{x}I).$$

Για το (β) χρησιμοποιήστε το γεγονός ότι όμοιοι πίνακες έχουν ίσα χαρακτηριστικά πολυώνυμα, ότι αν $\lambda_i = \frac{1}{\lambda_j}$, τότε $\lambda_j = \frac{1}{\lambda_i}$, ότι $\lambda_i = \frac{1}{\lambda_i}$ αν και μόνο αν $\lambda_i = \pm 1$ και ότι ο n είναι περιττός.

(166) Προσθέστε στην i γραμμή του $A - xI$ όλες τις γραμμές του πίνακα αυτού εκτός της i γραμμής. Προκύπτει ένας πίνακας B με $\det(B) = \det(A - xI)$, κάθε στοιχείο της i γραμμής του οποίου είναι ίσο με $-x$. Επομένως $\det(B) = -x\det(C)$, όπου C είναι ο πίνακας που προκύπτει από τον B αντικαθιστώντας κάθε στοιχείο $-x$ της i γραμμής με το 1. Προσθέστε στην j στήλη του C όλες τις στήλες εκτός της j στήλης, αναπτύξτε την ορίζουσα του πίνακα που προκύπτει κατά τα στοιχεία της j στήλης και θέστε $x = 0$ για να συμπεράνετε το ζητούμενο.

(167) Παρατηρήστε ότι η ζητούμενη σχέση ισχύει και για $m = 1$, με την έννοια ότι $p_1(x) = 1$, αφού στην περίπτωση αυτή οι f_0 και f_1 είναι μηδενικές απεικονίσεις και συνεπώς $V_1 = \ker f_1 = \operatorname{Im} f_0 = \{0\}$. Στην περίπτωση $m = 2$, δείξτε ότι η $f_1 : V_1 \to V_2$ είναι ισομορφισμός, γράψτε τη σχέση $T_2 \circ f_1 = f_1 \circ T_1$ στη μορφή $T_1 = f_1^{-1} \circ T_2 \circ f_1$ και συμπεράνετε ότι $p_1(x) = p_2(x)$. Στην περίπτωση $m = 3$, συνάγετε από τις υποθέσεις για τις f_i ότι η απεικόνιση $f_1 : V_1 \to V_2$ είναι 1–1, ότι η $f_2 : V_2 \to V_3$ είναι επί και ότι $\operatorname{Im} f_1 = \ker f_2$. Επίσης, συνάγετε από τη σχέση $T_2 \circ f_1 = f_1 \circ T_1$ ότι ο υπόχωρος $\operatorname{Im} f_1$ του V_2 είναι T_2-αναλλοίωτος. Επεκτείνετε μια τυχαία βάση $(v_1, \ldots, v_k)$ του χώρου $\operatorname{Im} f_1 \subseteq V_2$ σε μια βάση $(v_1, \ldots, v_n)$ του V_2 και δείξτε, χρησιμοποιώντας τη σχέση $\operatorname{Im} f_1 = \ker f_2$, ότι τα διανύσματα $f_2(v_j)$ για $k < j \le n$ αποτελούν βάση του V_3. Χρησιμοποιώντας τον πίνακα του T_2 ως προς τη βάση $(v_1, \ldots, v_n)$ του V_2, καθώς και την περίπτωση $m = 2$, δείξτε ότι $p_2(x) = p_1(x)p_3(x)$. Για τη γενική περίπτωση χρησιμοποιήστε την περίπτωση $m = 3$ και επαγωγή στο m. Το ζητούμενο της Άσκησης 132 προκύπτει εξισώνοντας τους βαθμούς των πολυωνύμων στα δύο μέλη της $p_1(x)\,p_3(x)\cdots = p_2(x)\,p_4(x)\cdots$ (όπου η υπόθεση $T_{i+1} \circ f_i = f_i \circ T_i$ ικανοποιείται π.χ. επιλέγοντας τον $T_i : V_i \to V_i$ ως τον ταυτοτικό ενδομορφισμό του V_i για $1 \le i \le m$).

(168) Δείξτε ότι υπάρχουν άπειρες τιμές του $\lambda \in \mathbb{F}$ για τις οποίες ο $A + \lambda I$ είναι αντιστρέψιμος. Αν λ και μ είναι δύο οποιεσδήποτε από αυτές, παρατηρήστε ότι οι $(A + \lambda I)^2$ και $(A + \mu I)^2$ είναι συμμετρικοί πίνακες και συνάγετε το ζητούμενο.

(169) Το ερώτημα έχει θετική απάντηση. Παρατηρήστε ότι, όπως στην ειδική περίπτωση $B = I$, η ορίζουσα $\det(A + xB)$ είναι πολυώνυμο στο x βαθμού μικρότερου ή ίσου του n. Από την υπόθεση του προβλήματος, το πολυώνυμο αυτό έχει $n + 1$ διακεκριμένες ρίζες και επομένως συμπίπτει με το μηδενικό πολυώνυμο.

(170) Παρατηρούμε ότι $A^3 - I = (A - I)(A^2 + A + I)$ και συνεπώς $\det(A - I)\det(A^2 + A + I) = 1$. Αφού τα στοιχεία των πινάκων $A - I$ και $A^2 + A + I$ είναι ακέραιοι αριθμοί, οι ορίζουσες των πινάκων αυτών είναι επίσης ακέραιοι αριθμοί και συνεπώς είτε είναι και οι δύο ίσες με 1, είτε είναι και οι δύο ίσες με -1. Έστω $\chi_A(x) = \det(A - xI)$ το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A και έστω $1, \omega, \omega^2$ οι τρεις κυβικές ρίζες της μονάδος. Γράφοντας $A^2 + A + I = (A - \omega I)(A - \omega^2 I)$, βρίσκουμε ότι $\det(A^2 + A + I) = \chi_A(\omega)\chi_A(\omega^2) = \chi_A(\omega)\chi_A(\bar{\omega}) = |\chi_A(\omega)|^2 \ge 0$ και συμπεραίνουμε ότι $\det(A - I) = \det(A^2 + A + I) = 1$. Υποθέτουμε τώρα ότι $n = 2$ και θέτουμε $\chi_A(x) = x^2 - px + q$. Έχουμε τότε $\det(A - I) = \chi_A(1) = 1 - p + q$ και $\det(A^2 + A + I) = \chi_A(\omega)\chi_A(\omega^2) = (\omega^2 - p\omega + q)(\omega - p\omega^2 + q) = 1 + p - q + p^2 + pq + q^2$. Από αυτές τις ισότητες και από τις $\det(A - I) = \det(A^2 + A + I) = 1$ παίρνουμε $p = q = 0$. Από το Θεώρημα Cayley-Hamilton προκύπτει ότι $A^2 = O$.

(171) Το λ είναι η μόνη ιδιοτιμή του A, αφού $\chi_A(x) = \det(A - xI) = (\lambda - x)^n$. Λύνοντας το σύστημα $Ax = \lambda x$, δείξτε ότι τα μόνα ιδιοδιανύσματα του A είναι εκείνα της μορφής $x = (c\ 0\ \cdots\ 0)^t$ με $c \neq 0$.

(172) Προσθέτοντας στην πρώτη γραμμή του πίνακα $xI - A$ τις υπόλοιπες γραμμές, βρίσκουμε ότι

$$\chi_A(x) \;=\; \det(xI - A) \;=\; (x - a - b - c)\,\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -a & x & -c & -b \\ -b & -c & x & -a \\ -c & -b & -a & x \end{pmatrix}.$$

Πολλαπλασιάζοντας την πρώτη γραμμή της ορίζουσας που προέκυψε με a, b και c και αφαιρώντας το αποτέλεσμα από τη δεύτερη, τρίτη και τέταρτη γραμμή, αντίστοιχα, βρίσκουμε ότι

$$\chi_A(x) \;=\; (x-a-b-c)\,\det\begin{pmatrix} x+a & a-c & a-b \\ b-c & x+b & b-a \\ c-b & c-a & x+c \end{pmatrix}.$$

Προσθέτοντας τη δεύτερη γραμμή της ορίζουσας που προέκυψε στην τρίτη και την πρώτη γραμμή στη δεύτερη, βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned}\chi_A(x) &= (x-a-b-c)\,(x+a+b-c)\,(x-a+b+c)\,\det\begin{pmatrix} x+a & a-c & a-b \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= (x-a-b-c)\,(x+a+b-c)\,(x-a+b+c)\,(x+a-b+c)\end{aligned}$$

και συμπεραίνουμε ότι οι ιδιοτιμές του A είναι οι $a+b+c$, $a-b-c$, $b-a-c$ και $c-a-b$.

(173) Παρατηρήστε ότι ο πίνακας A έχει τάξη ένα και ίχνος $c_n = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$. Συμπεράνετε ότι ο A έχει την ιδιοτιμή μηδέν με αντίστοιχο ιδιοχώρο $\{x \in \mathbb{R}^{n\times 1} : x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n = 0\}$ διάστασης $n-1$ και απλή ιδιοτιμή το c_n με αντίστοιχο ιδιοχώρο που παράγεται από το διάνυσμα $(1\ 2\ \cdots\ n)^t$.

(174) Παρατηρήστε ότι η τάξη του C_n είναι μικρότερη ή ίση του 2, δείξτε ότι οι $n(a+b)$ και $n(a-b)$ είναι επίσης ιδιοτιμές του C_n και συμπεράνετε από την Άσκηση 161 ότι το μηδέν είναι ιδιοτιμή του C_n πολλαπλότητας τουλάχιστον $2n-2$ και ότι $\chi_{C_n}(x) = x^{2n-2}(x-na-nb)(x-na+nb)$. Για το (γ) ζητάμε την ορίζουσα του πίνακα $C_n + (c-a)I_{2n}$, η οποία ισούται με $\chi_{C_n}(a-c) = (c-a)^{2n-2}(c+(n-1)a+nb)(c+(n-1)a-nb)$.

(175) Για το (α) δείξτε ότι αν $Ax = \lambda x$ για κάποιο μη μηδενικό διάνυσμα $x \in \mathbb{F}^{n\times 1}$, τότε $p(A)x = p(\lambda)x$ και συμπεράνετε το ζητούμενο. Για το (β) χρησιμοποιήστε την ταυτότητα

$$A^k - x^k I = (A - xI)(A^{k-1} + xA^{k-2} + \cdots + x^{k-1}I)$$

για να παραγοντοποιήσετε τον πίνακα $p(A) - p(x)I$ και την ορίζουσά του.

(176) Θεωρήστε μια μη τετριμένη σχέση γραμμικής εξάρτησης $\sum_{i=1}^{n+1} c_i v_i = 0$ μεταξύ των δοσμένων ιδιοδιανυσμάτων $v_1, v_2, \ldots, v_{n+1}$ της T. Παρατηρήστε ότι όλοι οι συντελεστές c_i είναι μη μηδενικοί. Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι ιδιοδιανύσματα μιας γραμμικής απεικόνισης τα οποία έχουν διακεκριμένες αντίστοιχες ιδιοτιμές είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, δείξτε ότι τα $v_1, v_2, \ldots, v_{n+1}$ έχουν όλα την ίδια ιδιοτιμή λ και συμπεράνετε το ζητούμενο.

(177) Για το (α) παρατηρήστε ότι οι πίνακες $A - \lambda I$ και $B - \lambda I$ είναι επίσης όμοιοι (δείτε π.χ. το μέρος (α) της Άσκησης 154) και επομένως ότι ισχύει $\mathrm{rank}(A - \lambda I) = \mathrm{rank}(B - \lambda I)$. Από την ισότητα αυτή συνάγετε ότι $\dim\ker(A - \lambda I) = \dim\ker(B - \lambda I)$. Εναλλακτικά, χρησιμοποιήστε το γεγονός ότι οι A και B παριστάνουν τον ίδιο γραμμικό ενδομορφισμό $L : V \to V$ ως προς δύο (εν γένει διαφορετικές) βάσεις του διανυσματικού χώρου $V = \mathbb{F}^n$. Για το (β) θεωρήστε τους πίνακες της Άσκησης 156 (β) για να δείξετε ότι το ερώτημα έχει αρνητική απάντηση.

(178) Έστω $\lambda \in \mathbb{C}$ μια ιδιοτιμή του πίνακα A και έστω $V = \{x \in \mathbb{C}^n : Ax = \lambda x\}$ ο αντίστοιχος ιδιοχώρος. Ο πίνακας B αφήνει τον V αναλλοίωτο, αφού για κάθε $x \in V$ ισχύει $A(Bx) = B(Ax) = B(\lambda x) = \lambda(Bx)$ και συνεπώς $Bx \in V$. Έστω $\mu \in \mathbb{C}$ μια ιδιοτιμή του περιορισμού του πίνακα B στο χώρο V και έστω $W = \{x \in V : Bx = \mu x\}$ ο αντίστοιχος ιδιοχώρος. Με ανάλογο τρόπο, όπως προηγουμένως, βρίσκουμε ότι ο C αφήνει τον W αναλλοίωτο και συνεπώς ότι έχει τουλάχιστον μία ιδιοτιμή $\nu \in \mathbb{C}$ με αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα $y \in W$. Δείξαμε ότι υπάρχουν $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{C}$ και μη μηδενικό διάνυσμα $y \in \mathbb{C}^n$

τέτοια ώστε $Ay = \lambda y$, $By = \mu y$ και $Cy = \nu y$, δηλαδή ότι ισχύει το (α). Για το (β) παρατηρούμε ότι οι τρεις μιγαδικοί αριθμοί λ, μ, ν είναι γραμμικώς εξαρτημένοι επί του $\mathbb{R}$. Κατά συνάπεια, υπάρχουν $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\alpha\lambda+\beta\mu+\gamma\nu = 0$. Παρατηρούμε τότε ότι $(\alpha A+\beta B+\gamma C)(y) = (\alpha\lambda+\beta\mu+\gamma\nu)(y) = 0$. Άρα, ο πίνακας $\alpha A + \beta B + \gamma C$ έχει μη τετριμμένο πυρήνα και συνεπώς η ορίζουσά του είναι ίση με μηδέν.

(179) Για το (α), επιλέξτε μη μηδενικό διάνυσμα $x = (x_1 \ \cdots \ x_n)^t \in \mathbb{C}^n$ με $Ax = \lambda x$ και δείκτη $1 \le i \le n$ για τον οποίο το μέτρο του x_i είναι μέγιστο. Από την ισότητα $\sum_{j \neq i} a_{ij} x_j = (\lambda - 1) x_i$ και τα δεδομένα του προβλήματος συμπεράνετε ότι $|\lambda - 1| \le 1$ (παρόμοιο σκεπτικό χρησιμοποιήσαμε στη λύση της Άσκησης 39). Για το (β), συνάγετε από το (α) ότι όλες οι ιδιοτιμές του A είναι μη αρνητικοί πραγματικοί αριθμοί. Παρατηρήστε ότι το γινόμενο (αντίστοιχα, άθροισμα) αυτών ίσο με $\det(A)$ (αντίστοιχα, n) και χρησιμοποιήστε την ανισότητα αριθμητικού - γεωμετρικού μέσου.

(180) Για το (α) εφαρμόστε επαγωγή στο n. Για το (β) διαγωνοποιήστε τον 2×2 πίνακα του ερωτήματος (α) για να υπολογίσετε την n-στή του δύναμη.

(181) Θυμηθείτε (Άσκηση 161) ότι $\chi_A(x) = (-x)^{n-1}(x - c)$, όπου $c = \mathrm{tr}(A)$, και ότι ο ιδιοχώρος του A που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή μηδέν έχει διάσταση $\dim \ker(A) = n - \mathrm{rank}(A) = n - 1$ για να συμπεράνετε το ζητούμενο.

(182) Για το (α) παρατηρήστε ότι $Ax = \lambda x \Leftrightarrow (A+cI)x = (\lambda+c)x$ και συμπεράνετε ότι ο $A+cI$ έχει τους ίδιους ιδιοχώρους με τον A, ή ότι $P^{-1}AP = \Delta \Leftrightarrow P^{-1}(A+cI)P = \Delta + cI$. Για το (β) συνδυάστε το (α) με την Άσκηση 181.

(183) Για το (α) δείξτε ότι ο A είναι όμοιος με διαγώνιο πίνακα Δ για τον οποίο $\Delta^m = O$ για κάποιο θετικό ακέραιο m και συμπεράνετε ότι $A = O$. Για το (β) παρατηρήστε ότι ο πίνακας $A - \lambda I$ είναι μηδενοδύναμος και εφαρμόστε το αποτέλεσμα της Άσκησης 182 και το (α).

(184) Συνάγετε από τη λύση της Άσκησης 163 ότι ο A_n έχει n διακεκριμένες μιγαδικές ιδιοτιμές (και συνεπώς ότι είναι διαγωνίσιμος επί του $\mathbb{C}$ για κάθε n) και ότι είναι διαγωνίσιμος επί του $\mathbb{R}$ μόνο για $n = 2$.

(185) Για το (α) βρείτε αντιστρέψιμο πίνακα $P \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$ τέτοιον ώστε $A = P\Delta P^{-1}$, όπου

$$\Delta = \begin{pmatrix} p+2 & 0 & 0 \\ 0 & p-1 & 0 \\ 0 & 0 & p-1 \end{pmatrix}.$$

Για το (β) παρατηρήστε ότι αν $A = X^2$ με $X \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$, τότε $(p+2)(p-1)^2 = \det(A) = \det(X)^2$ και συμπεράνετε ότι είτε $p = 1$, είτε $p + 2 = q^2$ για κάποιο $q \in \mathbb{Q}$. Αντιστρόφως, υποθέστε ότι $p + 2 = q^2$ για κάποιο $q \in \mathbb{Q}$. Βρείτε μια τετραγωνική ρίζα του Δ στο $\mathbb{Q}^{3\times 3}$, για παράδειγμα τη

$$\Gamma = \begin{pmatrix} q & 0 & 0 \\ 0 & 1 & p-2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

και επαληθεύστε ότι για $X = P\Gamma P^{-1}$ έχουμε $X^2 = A$. Για $p = 1$, ο A έχει ιδιοτιμές 0, 0 και 3. Κάθε πίνακας $X \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ με $X^2 = A$ έχει ιδιοτιμές 0, 0 και $\pm\sqrt{3}$ και συνεπώς ίχνος που δεν είναι ρητός αριθμός, οπότε $X \notin \mathbb{Q}^{3\times 3}$.

(186) Το (α) είναι γνωστό από τη θεωρία. Για το (β) θεωρήστε τους πίνακες

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Καθένας από αυτούς τους πίνακες έχει δύο διακεκριμένες ιδιοτιμές και συνεπώς είναι διαγωνίσιμος επί του $\mathbb{F}$. Υποθέτοντας ότι υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας $P \in \mathbb{F}^{2\times 2}$ για τον οποίο οι πίνακες $P^{-1}AP$ και $P^{-1}BP$ είναι διαγώνιοι, δείξτε ότι ο $A + B$ είναι επίσης διαγωνίσιμος πίνακας και καταλήξτε σε άτοπο.

(187) Για το (α) δώστε απόδειξη γράφοντας $A = P\Delta P^{-1}$, όπου Δ είναι διαγώνιος πίνακας. Για το (β) δώστε απόδειξη, εφαρμόζοντας την Άσκηση 186. Για το (γ) δοκιμάστε τους πίνακες

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Για το (δ) παρατηρήστε ότι οποιοσδήποτε πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ με $A^2 + A + I = O$ ικανοποιεί τη σχέση $A^3 = I$ αλλά δεν έχει πραγματικές ιδιοτιμές, άρα δεν είναι διαγωνίσιμος επί του $\mathbb{R}$, και δώστε παράδειγμα τέτοιου πίνακα για $n = 2$. Για το (ε) δώστε απόδειξη, παρατηρώτας ότι το ελάχιστο πολυώνυμο του A δεν έχει πολλαπλές μιγαδικές ρίζες.

(188) Για το (γ) δώστε απόδειξη, εφαρμόζοντας την Άσκηση 186 (α). Για το (δ) δώστε απόδειξη παρατηρώντας ότι ο A έχει μια μη μηδενική ιδιοτιμή πολλαπλότητας δύο και χρησιμοποιώντας την τριγωνισιμότητα του A. Για τα (α), (β) και (ε) δοκιμάστε τους πίνακες

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

αντίστοιχα.

(189) Για το (α) εφαρμόστε την Άσκηση 186 (α). Για το (β) δοκιμάστε π.χ. τους πίνακες

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}, \quad B = \begin{pmatrix} \sqrt{x} & 0 \\ 0 & \sqrt{y} \end{pmatrix}$$

για κατάλληλους θετικούς πραγματικούς αριθμούς x, y.

(190) Δείξτε πρώτα ότι ο A είναι διαγωνίσιμος και ότι οι ιδιοτιμές του ανήκουν στο σύνολο $\{-1, 0, 1\}$ και ανάγετε το πρόβλημα στην περίπτωση στην οποία ο A είναι διαγώνιος.

(191) Αφού ο A είναι διαγωνίσιμος επί του $\mathbb{F}$, υπάρχει βάση $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ του $\mathbb{F}^{n\times 1}$ για την οποία $A \cdot e_i = \lambda_i e_i$ για $1 \le i \le n$, για κάποια $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{F}$. Θα δείξουμε ότι τα $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ είναι ανά δύο διαφορετικά στοιχεία του $\mathbb{F}$. Θέτουμε

$$v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

και παρατηρούμε ότι

$$v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad Av = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots \quad A^{n-1}v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Γράφοντας $v = c_1e_1 + c_2e_2 + \cdots + c_ne_n$, με $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{F}$, βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} v &= c_1e_1 + c_2e_2 + \cdots + c_ne_n \\ Av &= c_1\lambda_1e_1 + c_2\lambda_2e_2 + \cdots + c_n\lambda_ne_n \\ &\vdots \\ A^{n-1}v &= c_1\lambda_1^{n-1}e_1 + c_2\lambda_2^{n-1}e_2 + \cdots + c_n\lambda_n^{n-1}e_n. \end{aligned}$$

Από τη γραμμική ανεξαρτησία των $v, Av, \ldots, A^{n-1}v$ έπεται ότι

$$\det \begin{pmatrix} c_1 & c_1\lambda_1 & \cdots & c_1\lambda_1^{n-1} \\ c_2 & c_2\lambda_2 & \cdots & c_2\lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_n & c_n\lambda_n & \cdots & c_n\lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

και συνεπώς ότι $\lambda_i \neq \lambda_j$ για $i \neq j$.

(192) Το (α) είναι γνωστό από τη θεωρία. Για τα άλλα δύο ερωτήματα εφαρμόστε το (α) για να γράψετε τον A στη μορφή $A = QCQ^{-1}$, όπου ο $C \in \mathbb{C}^{n\times n}$ είναι άνω τριγωνικός πίνακας με στοιχεία επί της κύριας διαγωνίου τις ιδιοτιμές του A. Για το (β) δείξτε ότι ο $p(A)$ είναι όμοιος με τον $p(C)$ και συμπεράνετε ότι το χαρακτηριστικό του πολυώνυμο δίνεται από τον προτεινόμενο τύπο. Για το (γ) παρατηρήστε ότι για σταθερό Q, τα στοιχεία του A είναι συνεχείς συναρτήσεις των στοιχείων του C και θυμηθείτε ότι κάθε πίνακας $D \in \mathbb{C}^{n\times n}$ με n διακεκριμένες ιδιοτιμές είναι διαγωνίσιμος.

(193) Για το (α) παρατηρήστε ότι $\det(A) = \det(A^2) = \det(A)^2$ και συμπεράνετε ότι $\det(A) \in \{0, 1\}$. Για τα (β) και (γ) παρατηρήστε, ως ειδική περίπτωση της Άσκησης 192 (β), ότι

$$\chi_{A^2}(x) = (\lambda_1^2 - x)(\lambda_2^2 - x)\cdots(\lambda_n^2 - x)$$

όπου $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ είναι οι ιδιοτιμές του A και συμπεράνετε ότι υπάρχει μετάθεση σ του συνόλου $\{1, 2, \ldots, n\}$ για την οποία ισχύει $\lambda_i = \lambda_{\sigma(i)}^2$ για $1 \leq i \leq n$. Θεωρήστε έπειτα την κυκλική παράσταση της σ. Για το (δ), συνάγετε από το (γ) ότι οι μόνες δυνατές πραγματικές ιδιοτιμές του A είναι οι 0 και 1 και θυμηθείτε ότι το ίχνος του A είναι ίσο με το άθροισμα των ιδιοτιμών του A.

(194) Χρησιμοποιώντας την κανονική μορφή Jordan και την Άσκηση 160, δείξτε ότι οι ακέραιοι $n \leq 3$ έχουν αυτή την ιδιότητα. Για $n \geq 4$ θεωρήστε τους πίνακες της Άσκησης 156 (α).

(195) Για το (α) παρατηρήστε ότι αν $B = P^{-1}AP$, τότε $X \in \ker(T_B) \Leftrightarrow PXP^{-1} \in \ker(T_A)$ και συνάγετε ότι οι χώροι $\ker(T_A)$ και $\ker(T_B)$ είναι ισόμορφοι. Λόγω του (α), για τα (β) και (γ) μπορείτε να υποθέσετε ότι ο A είναι σε κανονική μορφή Jordan. Με αυτό ως δεδομένο, για το (γ) συμβουλευτείτε την Άσκηση 17 (δ) για να δείξετε το ζητούμενο.

(196) Χρησιμοποιώντας την κανονική μορφή Jordan του A, ανάγετε πρώτα το αποτέλεσμα στην περίπτωση στην οποία ο A είναι άνω τριγωνικός, με όλα τα στοιχεία στην κύρια διαγώνιο ίσα με ένα μη μηδενικό αριθμό $\lambda \in \mathbb{C}$. Έπειτα, παρατηρήστε (Άσκηση 22) ότι ο πίνακας $B = A - \lambda I$ είναι μηδενοδύναμος, θεωρήστε τον πίνακα

$$X \;=\; \sqrt{\lambda}\left(I + \frac{1}{\lambda}B\right)^{1/2} \;:=\; \sqrt{\lambda}\sum_{k\geq 0}\binom{1/2}{k}\left(\frac{1}{\lambda}B\right)^k,$$

όπου $\sqrt{\lambda} \in \mathbb{C}$ είναι μια τετραγωνική ρίζα του λ και $\binom{\alpha}{k} := \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)/k!$ για $k \in \mathbb{N}$, και δείξτε ότι $X^2 = A$.

(197) Για τη συνεπαγωγή (α) $\Rightarrow$ (β) χρησιμοποιήστε την Άσκηση 152 (β) (φυσικά υπάρχει ευκολότερος τρόπος αν $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, αφού τότε αρκεί να δείξει κανείς ότι όλες οι ιδιοτιμές του A είναι ίσες με μηδέν). Για τη (β) $\Rightarrow$ (γ) χρησιμοποιήστε το Θεώρημα Cayley-Hamilton. Η (γ) $\Rightarrow$ (α) είναι προφανής. Χωρίς τη χρήση του Θεωρήματος Cayley-Hamilton, μια απόδειξη της (β) $\Rightarrow$ (α) μπορεί να δοθεί ως εξής: Έστω ότι ο A δεν είναι μηδενοδύναμος και έστω $W_i = \operatorname{Im} T^i$. Από την υπόθεση έχουμε $\det(A) = 0$, οπότε $W_1 \neq V$. Παρατηρούμε ότι $V \supset W_1 \supset W_2 \supset \cdots \supset W_k = W_{k+1} > \{0\}$ για κάποιο θετικό ακέραιο k, οπότε ο

$W = W_k$ είναι T-αναλλοίωτος, γνήσιος υπόχωρος του $\mathbb{F}^n$. Προκύπτει ότι ο A είναι όμοιος με πίνακα της μορφής

$$\begin{pmatrix} A_1 & B \\ O & A_2 \end{pmatrix},$$

όπου οι A_1 και A_2 είναι τετραγωνικοί πίνακες διάστασης μικρότερης του n. Εφαρμόζοντας επαγωγή στο n συμπεραίνουμε ότι οι πίνακες αυτοί είναι μηδενοδύναμοι και καταλήγουμε σε άτοπο, δείχνοντας ότι ο A είναι επίσης μηδενοδύναμος. Μια ευθεία απόδειξη της (α) $\Rightarrow$ (γ) προκύπτει από την Άσκηση 152 (α) ή (β). Δώστε μια ακόμη απόδειξη ως εξής: Έστω $L = L_A : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n$ η γραμμική απεικόνιση με $L(x) = Ax$ για $x \in \mathbb{F}^n$. Θεωρήστε το μοναδικό θετικό ακέραιο m με $L^m = O$ και $L^{m-1} \neq O$. Επιλέξτε διάνυσμα $x \in \mathbb{F}^n$ με $L^{m-1}(x) \neq 0$ και δείξτε ότι m τα διανύσματα $x, L(x), L^2(x), \ldots, L^{m-1}(x)$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα (θεωρώντας μια σχέση γραμμικής εξάρτησης μεταξύ τους και εφαρμόζοντας τις $L^{m-1}, L^{m-2}, \ldots, L$ στη σχέση αυτή). Συμπεράνετε ότι $m \leq n$.

(198) Για την ισοδυναμία των (α) και (β) δείτε την Άσκηση 197 (φυσικά, η (α) $\Rightarrow$ (β) προκύπτει ευκολότερα από τη συνεπαγωγή $Ay = \lambda y \Rightarrow A^m y = \lambda^m y$). Για την ισοδυναμία των (β) και (γ) εκφράστε το ίχνος του A^k ως συνάρτηση των ιδιοτιμών του A. Θα χρειαστεί να δείξετε την εξής πρόταση: Αν $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ και $\lambda_1^k + \lambda_2^k + \cdots + \lambda_n^k = 0$ για κάθε θετικό ακέραιο k, τότε $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$.

(199) Για το (β) παρατηρήστε ότι για τυχαίο θετικό ακέραιο k ισχύει $C^k = ABC^{k-1} - BAC^{k-1} = ABC^{k-1} - BC^{k-1}A$. Συνάγετε ότι $\mathrm{tr}(C^k) = \mathrm{tr}(ABC^{k-1}) - \mathrm{tr}(BC^{k-1}A) = 0$ και χρησιμοποιήστε την Άσκηση 198. Το (α) είναι ειδική περίπτωση του (β).

(200) Παρατηρούμε ότι ο $(T_A)^m(X)$ είναι γραμμικός συνδυασμός πινάκων που προκύπτουν πολλαπλασιάζοντας m φορές, είτε από αριστερά είτε από δεξιά, τον πίνακα X με τον A, δηλαδή πινάκων της μορφής $A^i X A^j$ με $i + j = m$. Αφού ο A είναι μηδενοδύναμος μεγέθους n, έχουμε $A^n = O$ και συμπεραίνουμε ότι $(T_A)^m(X) = O$ για $m = 2n - 1$ και κάθε πίνακα $X \in \mathbb{F}^{n \times n}$. Το ίδιο σκεπτικό εφαρμόζεται αν είχαμε ορίσει ότι $T_A(X) = \lambda AX + \mu XA$ για τυχαία $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$.

(201) Για το (α) παρατηρήστε ότι ο $P(A)$ είναι ίσος με το άθροισμα του $P(0)\, I_n$ και ενός μηδενοδύναμου πίνακα και εφαρμόστε την Άσκηση 22 (β). Για το (β) παρατηρήστε ότι ο $Q(A) = A \cdot R(A)$ για κάποιο πολυώνυμο $R(z) \in \mathbb{C}[z]$. Για το (γ), αρκεί να δείξουμε ότι η γραμμική απεικόνιση $T : \mathbb{F}^{n \times n} \to \mathbb{F}^{n \times n}$ με $T(X) = P(A)X - XQ(A)$ για $X \in \mathbb{F}^{n \times n}$ έχει μηδενικό πυρήνα. Πράγματι, έστω ότι $P(A)X = XQ(A)$. Τότε, $(P(A))^m X = X(Q(A))^m$ για κάθε θετικό ακέραιο m και συνεπώς $(P(A))^n X = O$. Όμως, σύμφωνα με το (α), ο πίνακας $(P(A))^n$ είναι αντιστρέψιμος και επομένως η $(P(A))^n X = O$ δίνει $X = O$.

(202) Απάντηση για το (α): όλοι οι ακέραιοι $n \geq 2$ έχουν αυτή την ιδιότητα. Για το (β) αποδείξτε πρώτα την ειδική περίπτωση $P = I$, χρησιμοποιώντας την Άσκηση 197. Στη συνέχεια αποδείξτε τη γενική περίπτωση γράφοντας $P + A = P(I + Q)$, όπου $Q = P^{-1}A$, και παρατηρώντας ότι ο Q είναι μηδενοδύναμος. Για το (γ) χρησιμοποιήστε το (β) και συμπεράνετε ότι ισχύει $\det(P + xI + A) = \det(P + xI)$ για άπειρες τιμές του $x \in \mathbb{F}$ και επομένως για όλα τα $x \in \mathbb{F}$. Για το (δ) χρησιμοποιήστε την υπόθεση για $P = \lambda I$ με $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ και συνάγετε ότι όλες οι ιδιοτιμές του A είναι ίσες με μηδέν. Από το δεδομένο αυτό συμπεράνετε ότι ο A είναι μηδενοδύναμος.

(203) Βρείτε τέτοιο πίνακα A για $n = 1$ (εύκολο) και $n \geq 3$ και δείξτε ότι δεν υπάρχει τέτοιος πίνακας για $n = 2$, παρατηρώντας ότι $B^2 = O$ και $B \neq O$.

(204) Για το (α) παρατηρήστε ότι αν $(AB)^{n+1} = O$, τότε ο AB είναι μηδενοδύναμος $n \times n$ πίνακας και συνεπώς ισχύει $(AB)^n = O$, οπότε $(BA)^{n+1} = B(AB)^n A = O$. Για το ερώτημα στο (β), το οποίο έχει θετική απάντηση για κάθε θετικό

ακέραιο n, χρησιμοποιήστε την Άσκηση 164. Η πρόταση στο (γ) ισχύει μόνο για $n = 1$ και $n = 2$. Για $n = 3$ δοκιμάστε π.χ. τους πίνακες

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(205) Για το (α) χρησιμοποιήστε τη σχέση $\|u\|^2 = \langle u, u \rangle$, όπου $\langle\ ,\ \rangle$ είναι το εσωτερικό γινόμενο του E. Για το (β), υποθέτοντας ότι τα τρία δοσμένα γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα έχουν μέτρο ένα, χρησιμοποιήστε το (α) για να συμπεράνετε ότι υπάρχουν δύο διαφορετικά από αυτά, έστω u και v, για τα οποία ισχύει $\|u - v\|^2 < 3$. Δείξτε τέλος ότι τα διανύσματα αυτά έχουν τη ζητούμενη ιδιότητα. Για το (γ), χρησιμοποιήστε το (α) για να δείξετε ότι το ζητούμενο μέγιστο είναι ίσο με $3\sqrt{3}$ και λαμβάνεται όταν $x + y + z = 0$.

(206) Για το (α), χρησιμοποιώντας την ιδιότητα $W^{\perp\perp} = W$ που ισχύει για υποχώρους του $\mathbb{R}^n$, δείξτε ότι και τα δύο μέλη της προτεινόμενης ισότητας είναι ίσα με το χώρο των γραμμών του A. Το (β) προκύπτει από το (α). Το (γ) είναι προφανές. Η απάντηση στο (δ) είναι θετική. Από το (β) έχουμε ότι $\mathrm{Im}\,(B^t) \subseteq \mathrm{Im}\,(A^t)$. Συμπεράνετε ότι κάθε στήλη του B^t είναι γραμμικός συνδυασμός των στηλών του A^t και επομένως ότι υπάρχει πίνακας $C \in \mathbb{R}^{m\times m}$ τέτοιος ώστε $B^t = A^t C^t$, δηλαδή ώστε $B = CA$.

(207) Για το (α) δείξτε πρώτα ότι $\ker(A) \subseteq \ker(A^t A)$. Για τον αντίστροφο εγκλεισμό παρατηρήστε ότι αν $A^t Ax = 0$ για κάποιο $x \in \mathbb{R}^n$, τότε $\langle Ax, Ax\rangle = \langle x, A^t Ax\rangle = 0$ και συνάγετε ότι $Ax = 0$. Για το (β) παρατηρήστε πρώτα ότι $\mathrm{Im}(A^t A) \subseteq \mathrm{Im}(A^t)$. Έπειτα συνάγετε από το (α) και τις Ασκήσεις 94 και 95 ότι $\dim \mathrm{Im}(A^t A) = \dim \mathrm{Im}(A^t)$ και συμπεράνετε το ζητούμενο. Το (γ) έπεται από τα προηγούμενα αφού (Άσκηση 94) $\dim \mathrm{Im}(A) = \mathrm{rank}(A)$ για κάθε πίνακα A.

(208) Παρατηρήστε ότι για $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ισχύει

$$\langle A, A\rangle = \mathrm{tr}(A^2) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}^2 + \sum_{1\le i<j\le n} \left(\frac{a_{ij} + a_{ji}}{\sqrt{2}}\right)^2 - \sum_{1\le i<j\le n} \left(\frac{a_{ij} - a_{ji}}{\sqrt{2}}\right)^2.$$

Απάντηση: n^2 και n.

(209) Για το (α) παρατηρήστε ότι για κάθε πίνακα - στήλη $x \in \mathbb{R}^n$ ισχύουν $x^t Ax \ge 0$ και $x^t Bx \ge 0$ και συνάγετε ότι $x^t(A+B)x \ge 0$. Εργασθείτε παρόμοια για το (β). Για το (γ) παρατηρήστε ότι ο δοσμένος πίνακας γράφεται στη μορφή $A + B$, όπου A είναι ο $n \times n$ πίνακας κάθε στοιχείο του οποίου είναι ίσο με t και B είναι διαγώνιος πίνακας με θετικά στοιχεία στην κύρια διαγώνιο. Χρησιμοποιώντας τους σχετικούς ορισμούς, δείξτε ότι ο A είναι θετικά ημιορισμένος και ότι ο B είναι θετικά ορισμένος και συμπεράνετε το ζητούμενο από το αποτέλεσμα του (β).

(210) Για το (α) παρατηρήστε ότι αν $A^t Ax = 0$, τότε $0 = \langle A^t Ax,\, x\rangle = \langle Ax,\, Ax\rangle$. Για το (β) παρατηρήστε ότι για τυχαίο $y \in \mathbb{R}^{m\times 1}$ ισχύει

$$\langle (A^t A + BB^t)y,\, y\rangle = \langle Ay,\, Ay\rangle + \langle B^t y,\, B^t y\rangle \ge 0.$$

Χρησιμοποιώντας το (α) και την υπόθεση $\ker(A) = \mathrm{Im}(B)$, δείξτε ότι αν $y \in \mathbb{R}^{m\times 1}$ και $Ay = B^t y = 0$, τότε $y = 0$ και συμπεράνετε το ζητούμενο.

(211) Για το (α), εκφράστε τα ίχνη των πινάκων A και A^{-1} ως συναρτήσεις των ιδιοτιμών του A και εφαρμόστε την ανισότητα Cauchy-Schwartz. Για το (β), δείξτε ότι όλοι οι πίνακες της μορφής $\begin{pmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj} \end{pmatrix}$ είναι θετικά ορισμένοι και συμπεράνετε ότι $a_{ij}^2 < a_{ii}a_{jj}$.

(212) Για το (α) θεωρήστε τις ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ του B, οι οποίες είναι μη αρνητικοί πραγματικοί αριθμοί. Παρατηρήστε ότι ο $I + B$ έχει ιδιοτιμές $1 +$

$\lambda_1, 1+\lambda_2, \ldots, 1+\lambda_n$ και ότι

$$\det(I+B) \;=\; \prod_{i=1}^{n}(1+\lambda_i) \;\geq\; 1+\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n \;=\; 1+\det(B).$$

Για το (β) παρατηρήστε πρώτα ότι η προτεινόμενη ανισότητα ισχύει αν $\det(A) = \det(B) = 0$, αφού ο $A+B$ είναι θετικά ημιορισμένος. Διαφορετικά, υποθέστε ότι $\det(A) \neq 0$, επιλέξτε συμμετρικό, θετικά ορισμένο πίνακα $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ώστε $A = C^2$ και εφαρμόστε το (α) γράφοντας $A+B = C^2+B = C(I+C^{-1}BC^{-1})C$ και παρατηρώντας ότι ο πίνακας $C^{-1}BC^{-1}$ είναι συμμετρικός και θετικά ημιορισμένος.

(213) Για το (α) θεωρήστε μη μηδενικό πολυώνυμο $p(x)$ με μη αρνητικούς πραγματικούς συντελεστές, τέτοιο ώστε $p(A) = O$. Παρατηρήστε ότι για κάθε ιδιοτιμή λ του A, το $p(\lambda)$ είναι ιδιοτιμή του $p(A)$ και συμπεράνετε ότι $p(\lambda) = 0$ και ότι το λ δεν είναι θετικός πραγματικός αριθμός. Για το (β), υποθέτοντας ότι ο A είναι αρνητικά ημιορισμένος, δείξτε ότι το πολυώνυμο $\det(xI - A)$ έχει μη αρνητικούς συντελεστές και συμπεράνετε ότι $A \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$. Το αντίστροφο είναι άμεση συνέπεια του (α). Το (γ) έπεται από το (β), αφού το άθροισμα αρνητικά ημιορισμένων συμμετρικών πινάκων είναι αρνητικά ημιορισμένος συμμετρικός πίνακας (βλέπε μέρος (α) της Άσκησης 209). Για το τελευταίο ερώτημα, οι ζητούμενες τιμές είναι μόνο η $n = 1$. Για $n = 2$ αρκεί να θέσει κανείς

$$A \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Τότε $A, B \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, αφού $A^2 = B^2 = O$, αλλά ο $A+B$ δεν ανήκει στο $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

(214) Υποθέστε π.χ. ότι ο B είναι θετικά ημιορισμένος. Τότε υπάρχει πίνακας $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ τέτοιος ώστε $B = QQ^t$. Χρησιμοποιώντας την Άσκηση 164, δείξτε ότι $\det(AB - xI_n) = \det(AQQ^t - xI_n) = \det(Q^tAQ - xI_n)$. Παρατηρήστε ότι ο Q^tAQ είναι συμμετρικός πίνακας και συμπεράνετε το ζητούμενο.

(215) Για το (α) εφαρμόστε την ανισότητα Cauchy-Schwartz $\|x\cdot y\| \leq \|x\|\|y\|$ όπου $x = (1,1,\ldots,1)$ και y είναι το διάνυσμα με συντεταγμένες τις μη μηδενικές ιδιοτιμές του A και θυμηθείτε ότι το πλήθος των μη μηδενικών ιδιοτιμών του A είναι ίσο με την τάξη του A. Για το (β) χρησιμοποιήστε το (α) και θυμηθείτε ότι $\sum_{i=1}^n \lambda_i = \mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$, ότι $\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 = \mathrm{tr}(A^2)$ (βλέπε π.χ. Άσκηση 193) και ότι $\mathrm{tr}(A^2) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^2$ (Άσκηση 12).

(216) Προφανώς ο πίνακας A είναι συμμετρικός. Συμβολίζοντας με $f_i : \mathbb{R}^2 \to \{0,1\}$ τη χαρακτηριστική συνάρτηση του συνόλου K_i για $1 \leq i \leq n$, παρατηρήστε ότι $a_{ij} = \int_{\mathbb{R}^2} f_i f_j$ και ότι για $x = (x_1\ x_2\ \cdots\ x_n)^t \in \mathbb{R}^n$ ισχύει

$$x^tAx \;=\; \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j \;=\; \sum_{i,j=1}^{n} x_ix_j \int_{\mathbb{R}^2} f_if_j \;=\; \int_{\mathbb{R}^2}\left(\sum_{i=1}^{n} x_if_i\right)^2 \;\geq\; 0.$$

Συνάγετε ότι ισχύει το (α) και επομένως και το (β).

(217) Θεωρήστε συμμετρικό, θετικά ορισμένο πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ με $A^tA = I$. Παρατηρήστε ότι $A^2 = I$ και δείξτε ότι όλες οι ιδιοτιμές του A είναι ίσες με 1. Χρησιμοποιώντας το φασματικό θεώρημα για συμμετρικούς πίνακες, ή παρατηρώντας ότι $(A-I)(A+I) = O$ και ότι ο $A+I$ είναι αντιστρέψιμος, συμπεράνετε ότι $A = I$.

(218) Για το (α), εξισώστε τις ορίζουσες στην ισότητα $P^tP = I$. Για το (β), χρησιμοποιώντας την ίδια σχέση, δείξτε ότι $\det(P+I) = 0$. Για το (γ) θεωρήστε το 2×2 μοναδιαίο πίνακα $U = iI$.

(219) Χρησιμοποιήστε την ισοδυναμία $UU^* = I \;\Leftrightarrow\; U^*U = I$.

(220) Για το (α) παρατηρήστε ότι ο πίνακας $A^*A + I$ είναι ερμιτιανός. Για το (β), αν $c_1, c_2, \dots, c_n \geq 0$ είναι οι ιδιοτιμές του ερμιτιανού πίνακα A^*A, δείξτε ότι $\det(A^*A + I) = \prod_{i=1}^{n}(1 + c_i)$.

(221) Ο πίνακας A^*A είναι ερμιτιανός με μη αρνητικές ιδιοτιμές, έστω $c_1, c_2, \dots, c_n \geq 0$. Εφαρμόστε την ανισότητα αριθμητικού - γεωμετρικού μέσου στους $c_1, c_2, \dots, c_n$, λαμβάνοντας υπόψην ότι $c_1c_2\cdots c_n = \det(A^*A) = \det(\overline{A})\det(A) = |\det(A)|^2$ και ότι $c_1 + c_2 + \cdots + c_n = \mathrm{tr}(A^*A)$.

(222) Για το (α) συμβουλευτείτε τη λύση της Άσκησης 22 (ε). Για το (β) χρησιμοποιείστε το φασματικό θεώρημα και δείξτε ότι, γενικότερα, ο μόνος κανονικός, μηδενοδύναμος πίνακας $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ είναι ο μηδενικός πίνακας. Απάντηση για το (α): $A = c\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$ με $c \in \mathbb{C}$.

(223) Για το (α) χρησιμοποιήστε τις σχέσεις $\det(A^t) = \det(A)$ και $\det(-A) = (-1)^n\det(A)$. Για το (β) χρησιμοποιήστε το γεγονός ότι ο A έχει φανταστικές ιδιοτιμές και ότι αν το $\lambda \in \mathbb{C}$ είναι ιδιοτιμή του A, τότε το $\bar{\lambda}$ είναι επίσης ιδιοτιμή του A. Για το (γ) θυμηθείτε ότι η τάξη του A είναι ίση με το πλήθος των μη μηδενικών ιδιοτιμών του A.

(224) Για το (α) παρατηρήστε ότι $2\bar{a}I_n = (A^* - A)^* = A - A^* = -2aI_n$ και συνάγετε το ζητούμενο. Για το (β) παρατηρήστε ότι $A = (A^* + A)/2 - aI_n$ και θυμηθείτε ότι ως ερμητιανός, ο πίνακας $(A^* + A)/2$ έχει μόνο πραγματικές ιδιοτιμές. Για το (γ) θυμηθείτε ότι η ορίζουσα του A είναι ίση με το γινόμενο των ιδιοτιμών του.

(225) Γράφουμε $T_i(z) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}z_j$ για $1 \leq i \leq m$, όπου $a_{ij} \in \mathbb{C}$ και $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)^t \in \mathbb{C}^n$. Αν $u_1, u_2, \dots, u_n$ είναι οι στήλες του πίνακα (a_{ij}), δείξτε ότι η δοσμένη ισότητα είναι ισοδύναμη με το σύστημα $\langle u_i, u_j\rangle = \delta_{ij}$. Συνάγετε ότι το $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητο (όντας ορθοκανονικό) υποσύνολο του $\mathbb{C}^m$ και συμπεράνετε ότι $n \leq m$.

(226) Το (α) είναι εύκολο. Για το (β) επιλέξτε ιδιοτιμή $\lambda \in \mathbb{C}$ του B και δείξτε ότι ο αντίστοιχος ιδιοχώρος $V(\lambda)$ του B είναι T-αναλλοίωτος. Συμπεράνετε ότι υπάρχει κοινό ιδιοδιάνυσμα $w = u_1 \in \mathbb{C}$ των A και B με μέτρο ένα. Χρησιμοποιήστε το ερώτημα (α) και επαγωγή στο n για να συμπληρώσετε το μονοσύνολο $\{u_1\}$ σε ορθοκανονική βάση $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ του $\mathbb{C}^n$ τα στοιχεία της οποίας είναι κοινά ιδιοδιανύσματα των A και B.

(227) Για το (α) χρησιμοποιήστε επαγωγή στο k και εργαστείτε όπως στο (β) της Άσκησης 226. Για το (β) εφαρμόστε το (α) για να ανάγετε το πρόβλημα στην περίπτωση στην οποία οι πίνακες $A_1, A_2, \dots, A_p$ είναι όλοι διαγώνιοι.

(228) Θεωρήστε τη διγραμμική μορφή $\langle x, y\rangle = x^tAy$ στο χώρο $\mathbb{C}^n$. Δείξτε ότι ο $\mathbb{C}^n$ έχει ορθογώνια βάση ως προς τη μορφή αυτή και συμπεράνετε ότι $A = Q^t\Delta Q$ για κάποιον αντιστρέψιμο πίνακα $Q \in \mathbb{C}^{n\times n}$ και διαγώνιο πίνακα $\Delta \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Τέλος, γράψτε $\Delta = \Delta_0^2$ για διαγώνιο πίνακα $\Delta_0 \in \mathbb{C}^{n\times n}$ και θέστε $P = \Delta_0 Q$.

(229) Για το (β) χρησιμοποιήστε το (α) και το φασματικό θεώρημα για κανονικούς πίνακες. Για το (γ) χρησιμοποιήστε το (β). Η απάντηση στο (δ) είναι αρνητική. Δοκιμάστε τους πίνακες

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(230) Θέτουμε $\sigma_{n,r}(i) := \sum_{q\in\mathbb{N}} a_{n,r,qr+i}$ για $i \in \{0, 1, \dots, r-1\}$ και θεωρούμε την πρωταρχική r-στή ρίζα της μονάδος ζ. Θέτοντας $x = \zeta^j$ στην ταυτότητα που ορίζει τα $a_{n,r,k}$ βρίσκουμε ότι

$$\sum_{i=0}^{r-1} \sigma_{n,r}(i)\,\zeta^{ij} = \begin{cases} r^n, & \text{αν } j = 0, \\ 0, & \text{αν } j \in \{1, 2, \dots, r-1\}. \end{cases}$$

Θεωρούμε τις εξισώσεις αυτές ως ένα σύστημα r γραμμικών εξισώσεων στους r αγνώστους $\sigma_{n,r}(i)$. Παρατηρούμε ότι το σύστημα έχει μη μηδενική ορίζουσα Vandermonde και συνεπώς μοναδική λύση. Αφού η $\sigma_{n,r}(i) = r^{n-1}$ για $i \in \{0, 1, \dots, r-1\}$ είναι μια λύση (εξηγήστε γιατί), έπεται το ζητούμενο.

(231) Για το (α) παρατηρήστε ότι $\|Az\|/\|z\| = \|A(z/\|z\|)\| \le \|A\|$ για $z \neq 0$ και ότι η ανισότητα είναι τετριμμένη για $z = 0$. Για το (β) παρατηρήστε ότι $\|(A+B)z\| = \|Az + Bz\| \le \|Az\| + \|Bz\| \le \|A\| + \|B\|$ για κάθε $z \in \mathbb{C}^{n\times 1}$ με $\|z\| = 1$. Για τα (γ) και (δ) εφαρμόστε τον ορισμό και χρησιμοποιήστε το (α). Για το (ε) γράψτε το z ως γραμμικό συνδυασμό των στοιχείων μιας ορθοκανονικής βάσης $\mathbb{C}^{n\times 1}$ που αποτελείται από ιδιοδιανύσματα του A. Για το (στ) παρατηρήστε πρώτα ότι $\|Az\|^2 = \langle Az, Az\rangle = \langle z, A^*Az\rangle \le \|z\| \cdot \|A^*Az\| \le \|A^*A\| \cdot \|z\|^2$ για $z \in \mathbb{C}^{n\times 1}$ και συμπεράνετε, χρησιμοποιώντας το (δ), ότι $\|A\|^2 \le \|A^*A\| \le \|A^*\| \cdot \|A\|$ και συνεπώς ότι $\|A\| \le \|A^*\|$. Αντικαθιστώντας το A με το A^* βρίσκουμε και ότι $\|A^*\| \le \|A\|$.

(232) Για το (α) παρατηρούμε ότι $A_nA_n^t = A_n + A_n^t - J_n$, όπου J_n είναι ο διαγώνιος πίνακας με στοιχεία $1, 1/2, \dots, 1/n$ στην κύρια διαγώνιο. Εφαρμόζοντας τα (β) και (στ) της Άσκησης 231, βρίσκουμε ότι

$$\|A_nA_n^t\| \le \|A_n\| + \|A_n^t\| + 1$$

και ότι $\|A_n\|^2 \le 2\|A_n\| + 1$, οπότε $\|A_n\| \le 1 + \sqrt{2}$. Για το (β) συνάγουμε από την Άσκηση 231 (α) ότι

$$\|A_nx\|^2 \le \|A_n\|^2 \cdot \|x\|^2 \le (3 + 2\sqrt{2}) \cdot \|x\|^2$$

για $x \in \mathbb{R}^{n\times 1}$, που είναι το ζητούμενο.