Ασκήσεις Απειροστικού Λογισμού

Seemous 2021

9 Ιανουαρίου 2021

Άσκηση 1

Έστω $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in (0, \pi)$ και $m = \frac{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n}{n}$. Δείξτε ότι

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{\sin \alpha_i}{\alpha_i} \leqslant \left(\frac{\sin m}{m} \right)^n .$$

Άσκηση 1

Έστω $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in (0, \pi)$ και $m = \frac{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n}{n}$. Δείξτε ότι

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{\sin \alpha_i}{\alpha_i} \leqslant \left(\frac{\sin m}{m}\right)^n .$$

Αρκεί να δείξουμε ότι:

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\log(\sin \alpha_i) - \log \alpha_i\right) \leqslant n \left(\log(\sin m) - \log m\right).$$

Άσκηση 1

Έστω $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in (0, \pi)$ και $m = \frac{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n}{n}$. Δείξτε ότι

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{\sin \alpha_i}{\alpha_i} \leqslant \left(\frac{\sin m}{m} \right)^n .$$

Αρκεί να δείξουμε ότι:

$$\sum_{i=1}^{n} (\log(\sin \alpha_i) - \log \alpha_i) \leqslant n (\log(\sin m) - \log m) .$$

Αρκεί να δείξουμε ότι η $f(x) = \log(\sin x) - \log x$ είναι κοίλη στο $(0, \pi)$.

Άσκηση 1

Έστω $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in (0, \pi)$ και $m = \frac{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n}{n}$. Δείξτε ότι

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{\sin \alpha_i}{\alpha_i} \leqslant \left(\frac{\sin m}{m} \right)^n .$$

Αρκεί να δείξουμε ότι:

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\log(\sin \alpha_i) - \log \alpha_i \right) \leqslant n \left(\log(\sin m) - \log m \right).$$

Αρκεί να δείξουμε ότι η $f(x) = \log(\sin x) - \log x$ είναι κοίλη στο $(0, \pi)$.

Παραγωγίζουμε:

$$f'(x) = \cot x - \frac{1}{x} \qquad \text{και} \qquad f''(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x}.$$

Άσκηση 2

Αποδείξτε ότι, για κάθε $m \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+m}\sqrt{\frac{m}{n}} < \pi.$$

Άσκηση 2

Αποδείξτε ότι, για κάθε $m \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+m}\sqrt{\frac{m}{n}} < \pi.$$

Η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{m+x}\sqrt{\frac{m}{x}}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$.

Άσκηση 2

Αποδείξτε ότι, για κάθε $m \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+m}\sqrt{\frac{m}{n}} < \pi.$$

Η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{m+x}\sqrt{\frac{m}{x}}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$.
Άρα,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+m}\sqrt{\frac{m}{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} f(n) < \int_0^{\infty} f(x)\,dx.$$

Άσκηση 2

Αποδείξτε ότι, για κάθε $m \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+m}\sqrt{\frac{m}{n}} < \pi.$$

Η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{m+x}\sqrt{\frac{m}{x}}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$.
Άρα,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+m}\sqrt{\frac{m}{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} f(n) < \int_0^{\infty} f(x)\, dx.$$

Υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα με την αντικατάσταση $t = \sqrt{x/m}$ (οπότε $dx = 2mt\, dt$):

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{m+x}\sqrt{\frac{m}{x}}\, dx = 2\int_0^{\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \pi.$$

Άσκηση 3

Να βρεθεί το

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k^2+n^2}.$$

Άσκηση 3

Να βρεθεί το

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{k^2+n^2}.$$

Θεωρούμε την $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$ για $x\in[0,1]$. Παρατηρούμε ότι

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{k^2+n^2}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{k}{n}}{\frac{k^2}{n}+n}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{k}{n}}{\frac{k^2}{n^2}+1}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right).$$

Άσκηση 3

Να βρεθεί το

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k^2+n^2}.$$

Θεωρούμε την $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ για $x \in [0,1]$. Παρατηρούμε ότι

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k^2+n^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\frac{k}{n}}{\frac{k^2}{n}+n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\frac{k}{n}}{\frac{k^2}{n^2}+1} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

Η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$ και ισχύει ότι

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(t)dt.$$

Άσκηση 3

Να βρεθεί το

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{k^2+n^2}.$$

Θεωρούμε την $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$ για $x\in[0,1]$. Παρατηρούμε ότι

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{k^2+n^2}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{k}{n}}{\frac{k^2}{n}+n}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{k}{n}}{\frac{k^2}{n^2}+1}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right).$$

Η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$ και ισχύει ότι

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(t)dt.$$

Όμως,

$$\int_0^1 f(t)dt=\int_0^1\frac{t}{t^2+1}dt=\frac{1}{2}\int_0^1(\log(t^2+1))'dt=\frac{\log 2}{2},$$

Άσκηση 3

Να βρεθεί το

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{k^2+n^2}.$$

Θεωρούμε την $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$ για $x\in[0,1]$. Παρατηρούμε ότι

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{k^2+n^2}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{k}{n}}{\frac{k^2}{n}+n}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{k}{n}}{\frac{k^2}{n^2}+1}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right).$$

Η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$ και ισχύει ότι

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(t)dt.$$

Όμως,

$$\int_0^1 f(t)dt=\int_0^1\frac{t}{t^2+1}dt=\frac{1}{2}\int_0^1(\log(t^2+1))'dt=\frac{\log 2}{2},$$

άρα τελικά

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{k^2+n^2}=\frac{\log 2}{2}.$$

Άσκηση 4

Εξετάστε αν συγκλίνει η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$, όπου

$$\alpha_k = \int_1^{\infty} \exp\left(-x^{k^2}\right)\, dx.$$

Άσκηση 4

Εξετάστε αν συγκλίνει η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$, όπου

$$\alpha_k = \int_1^{\infty} \exp\left(-x^{k^2}\right)\, dx.$$

Αν θέσουμε $x^{k^2} = u$, τότε $x = u^{\frac{1}{k^2}}$, άρα $dx = \frac{1}{k^2} u^{\frac{1}{k^2}-1} du$.

Άσκηση 4

Εξετάστε αν συγκλίνει η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$, όπου

$$\alpha_k = \int_1^{\infty} \exp\left(-x^{k^2}\right)\, dx.$$

Αν θέσουμε $x^{k^2} = u$, τότε $x = u^{\frac{1}{k^2}}$, άρα $dx = \frac{1}{k^2} u^{\frac{1}{k^2}-1} du$.
Συνεπώς,

$$0 \leqslant \alpha_k = \int_1^{\infty} \exp\left(-x^{k^2}\right)\, dx = \frac{1}{k^2} \int_1^{\infty} e^{-u} u^{\frac{1}{k^2}-1}\, du = \frac{1}{k^2} \int_1^{\infty} e^{-u} \frac{u^{1/k^2}}{u}\, du.$$

Άσκηση 4

Εξετάστε αν συγκλίνει η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$, όπου

$$\alpha_k = \int_1^{\infty} \exp\left(-x^{k^2}\right)\, dx.$$

Αν θέσουμε $x^{k^2} = u$, τότε $x = u^{\frac{1}{k^2}}$, άρα $dx = \frac{1}{k^2} u^{\frac{1}{k^2}-1} du$.
Συνεπώς,

$$0 \leqslant \alpha_k = \int_1^{\infty} \exp\left(-x^{k^2}\right)\, dx = \frac{1}{k^2} \int_1^{\infty} e^{-u} u^{\frac{1}{k^2}-1}\, du = \frac{1}{k^2} \int_1^{\infty} e^{-u} \frac{u^{1/k^2}}{u}\, du.$$

Όμως, για $u \geqslant 1$ ισχύει ότι $u^{1/k^2} \leqslant u$, άρα

$$\alpha_k \leqslant \frac{1}{k^2} \int_1^{\infty} e^{-u}\, du = \frac{e^{-1}}{k^2}.$$

Άσκηση 4

Εξετάστε αν συγκλίνει η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$, όπου

$$\alpha_k = \int_1^{\infty} \exp\left(-x^{k^2}\right)\, dx.$$

Αν θέσουμε $x^{k^2} = u$, τότε $x = u^{\frac{1}{k^2}}$, άρα $dx = \frac{1}{k^2} u^{\frac{1}{k^2}-1} du$.
Συνεπώς,

$$0 \leqslant \alpha_k = \int_1^{\infty} \exp\left(-x^{k^2}\right)\, dx = \frac{1}{k^2}\int_1^{\infty} e^{-u} u^{\frac{1}{k^2}-1}\, du = \frac{1}{k^2}\int_1^{\infty} e^{-u}\frac{u^{1/k^2}}{u}\, du.$$

Όμως, για $u \geqslant 1$ ισχύει ότι $u^{1/k^2} \leqslant u$, άρα

$$\alpha_k \leqslant \frac{1}{k^2}\int_1^{\infty} e^{-u}\, du = \frac{e^{-1}}{k^2}.$$

Επομένως η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ συγκλίνει.

Άσκηση 5

Εξετάστε αν συγκλίνει η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$, όπου

$$\alpha_k = \int_0^1 \cos(kt^2)\, dt.$$

Άσκηση 5

Εξετάστε αν συγκλίνει η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$, όπου

$$\alpha_k = \int_0^1 \cos(kt^2)\, dt.$$

Αν $u = kt^2 = u$ τότε $t = \sqrt{\frac{u}{k}}$, και

$$\begin{aligned}
\alpha_k = \int_0^1 \cos(kt^2)\, dt &= \frac{1}{\sqrt{k}} \int_0^k \frac{1}{2\sqrt{u}} \cos u\, du \\
&= \frac{1}{\sqrt{k}} \int_0^k (\sqrt{u})' \cos u\, du = \frac{1}{\sqrt{k}} \sqrt{k} \cos k - \frac{1}{\sqrt{k}} \int_0^k \sqrt{u} (\cos u)'\, du \\
&= \cos k + \frac{1}{\sqrt{k}} \int_0^k \sqrt{u} \sin u\, du.
\end{aligned}$$

Άσκηση 5

Εξετάστε αν συγκλίνει η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$, όπου

$$\alpha_k = \int_0^1 \cos(kt^2)\, dt.$$

Αν $u = kt^2 = u$ τότε $t = \sqrt{\frac{u}{k}}$, και

$$\begin{aligned}
\alpha_k = \int_0^1 \cos(kt^2)\, dt &= \frac{1}{\sqrt{k}} \int_0^k \frac{1}{2\sqrt{u}} \cos u\, du \\
&= \frac{1}{\sqrt{k}} \int_0^k (\sqrt{u})' \cos u\, du = \frac{1}{\sqrt{k}} \sqrt{k} \cos k - \frac{1}{\sqrt{k}} \int_0^k \sqrt{u} (\cos u)'\, du \\
&= \cos k + \frac{1}{\sqrt{k}} \int_0^k \sqrt{u} \sin u\, du.
\end{aligned}$$

Για κάθε $k \in \mathbb{N}$ υπάρχει $\xi_k \in [0, k]$ τέτοιο ώστε

$$\int_0^k \sqrt{u} \sin u\, du = \sqrt{\xi_k} \int_0^k \sin u\, du.$$

Επομένως,

$$\alpha_k = \cos k + \frac{\sqrt{\xi_k}}{\sqrt{k}} \int_0^k \sin u \, du = \cos k - \sqrt{\frac{\xi_k}{k}}(\cos k - 1) = \cos k + \sqrt{\frac{\xi_k}{k}}(1 - \cos k).$$

Επομένως,

$$\alpha_k = \cos k + \frac{\sqrt{\xi_k}}{\sqrt{k}} \int_0^k \sin u \, du = \cos k - \sqrt{\frac{\xi_k}{k}}(\cos k - 1) = \cos k + \sqrt{\frac{\xi_k}{k}}(1 - \cos k).$$

Έστω ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ συγκλίνει. Τότε,

$$\alpha_k \to 0 \quad \Longrightarrow \quad \cos k + \sqrt{\frac{\xi_k}{k}}(1 - \cos k) \to 0.$$

Επομένως,

$$\alpha_k = \cos k + \frac{\sqrt{\xi_k}}{\sqrt{k}} \int_0^k \sin u \, du = \cos k - \sqrt{\frac{\xi_k}{k}}(\cos k - 1) = \cos k + \sqrt{\frac{\xi_k}{k}}(1 - \cos k).$$

Έστω ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ συγκλίνει. Τότε,

$$\alpha_k \to 0 \quad \Longrightarrow \quad \cos k + \sqrt{\frac{\xi_k}{k}}(1 - \cos k) \to 0.$$

Όμως, υπάρχει υπακολουθία (m_k) των φυσικών τέτοια ώστε $\cos m_k \to 1$, και αφού $0 \leqslant \sqrt{\frac{\xi_k}{m_k}} \leqslant 1$, θα ισχύει ότι $\sqrt{\frac{\xi_{m_k}}{m_k}}(1 - \cos m_k) \to 0$,

Επομένως,

$$\alpha_k = \cos k + \frac{\sqrt{\xi_k}}{\sqrt{k}} \int_0^k \sin u \, du = \cos k - \sqrt{\frac{\xi_k}{k}}(\cos k - 1) = \cos k + \sqrt{\frac{\xi_k}{k}}(1 - \cos k).$$

Έστω ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ συγκλίνει. Τότε,

$$\alpha_k \to 0 \quad \implies \quad \cos k + \sqrt{\frac{\xi_k}{k}}(1 - \cos k) \to 0.$$

Όμως, υπάρχει υπακολουθία (m_k) των φυσικών τέτοια ώστε $\cos m_k \to 1$, και αφού $0 \leqslant \sqrt{\frac{\xi_k}{m_k}} \leqslant 1$, θα ισχύει ότι $\sqrt{\frac{\xi_{m_k}}{m_k}}(1 - \cos m_k) \to 0$, άρα

$$\cos m_k + \sqrt{\frac{\xi_{m_k}}{m_k}}(1 - \cos m_k) \to 1,$$

άτοπο.

Επομένως,

$$\alpha_k = \cos k + \frac{\sqrt{\xi_k}}{\sqrt{k}} \int_0^k \sin u \, du = \cos k - \sqrt{\frac{\xi_k}{k}}(\cos k - 1) = \cos k + \sqrt{\frac{\xi_k}{k}}(1 - \cos k).$$

Έστω ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ συγκλίνει. Τότε,

$$\alpha_k \to 0 \quad \Longrightarrow \quad \cos k + \sqrt{\frac{\xi_k}{k}}(1 - \cos k) \to 0.$$

Όμως, υπάρχει υπακολουθία (m_k) των φυσικών τέτοια ώστε $\cos m_k \to 1$, και αφού $0 \leqslant \sqrt{\frac{\xi_k}{m_k}} \leqslant 1$, θα ισχύει ότι $\sqrt{\frac{\xi_{m_k}}{m_k}}(1 - \cos m_k) \to 0$, άρα

$$\cos m_k + \sqrt{\frac{\xi_{m_k}}{m_k}}(1 - \cos m_k) \to 1,$$

άτοπο.
Επομένως, η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ δεν συγκλίνει.

Άσκηση 6

Να βρεθεί το

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_0^1 \sqrt[n]{e^{x^2}}\,dx\right)^n.$$

Άσκηση 6

Να βρεθεί το

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_0^1 \sqrt[n]{e^{x^2}}\,dx\right)^n .$$

Ισχύει γενικά

$$\lim_{p\to 0^+}\left(\int_0^1 |f|^p\right)^{1/p} = \exp\left(\int_0^1 \log|f|\right).$$

Άσκηση 6

Να βρεθεί το
$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_0^1 \sqrt[n]{e^{x^2}}\,dx\right)^n.$$

Ισχύει γενικά
$$\lim_{p\to 0^+}\left(\int_0^1 |f|^p\right)^{1/p} = \exp\left(\int_0^1 \log|f|\right).$$

Εδώ,
$$\left(\int_0^1 \sqrt[n]{e^{x^2}}dx\right)^n \to \exp\left(\int_0^1 x^2 dx\right) = e^{1/3}.$$

Για την απόδειξη της

$$\lim_{p\to 0^+}\left(\int_0^1 |f|^p\right)^{1/p} = \exp\left(\int_0^1 \log|f|\right)$$

δείξτε πρώτα ότι: αν μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $F:(a,b)\to\mathbb{R}$ είναι κυρτή και $g:[0,1]\to(a,b)$, g συνεχής, τότε

$$F\Big(\int_0^1 g(t)\,dt\Big) \leqslant \int_0^1 (F\circ g)(t)\,dt.$$

[*Υπόδειξη:* Θεωρήστε την $F(g(x)) - F(t_0) \geqslant F'(t_0)(g(x)-t_0)$ όπου $t_0 = \int_0^1 g(t)\,dt$ και ολοκληρώστε.]

Για την απόδειξη της

$$\lim_{p\to 0^+}\left(\int_0^1 |f|^p\right)^{1/p} = \exp\left(\int_0^1 \log|f|\right)$$

δείξτε πρώτα ότι: αν μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $F:(a,b)\to\mathbb{R}$ είναι κυρτή και $g:[0,1]\to(a,b)$, g συνεχής, τότε

$$F\Big(\int_0^1 g(t)\,dt\Big) \leqslant \int_0^1 (F\circ g)(t)\,dt.$$

[*Υπόδειξη:* Θεωρήστε την $F(g(x)) - F(t_0) \geqslant F'(t_0)(g(x)-t_0)$ όπου $t_0 = \int_0^1 g(t)\,dt$ και ολοκληρώστε.]
Τώρα, αποδείξτε ότι:
(α) $\log\left(\int_0^1 |f|^p\right)^{1/p} \geqslant \int_0^1 \log|f|$ για κάθε $p>0$, χρησιμοποιώντας το προηγούμενο για την $F(t)=e^t$.

Για την απόδειξη της

$$\lim_{p\to 0^+}\left(\int_0^1 |f|^p\right)^{1/p} = \exp\left(\int_0^1 \log|f|\right)$$

δείξτε πρώτα ότι: αν μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $F:(a,b)\to\mathbb{R}$ είναι κυρτή και $g:[0,1]\to(a,b)$, g συνεχής, τότε

$$F\Big(\int_0^1 g(t)\,dt\Big) \leqslant \int_0^1 (F\circ g)(t)\,dt.$$

[*Υπόδειξη*: Θεωρήστε την $F(g(x)) - F(t_0) \geqslant F'(t_0)(g(x)-t_0)$ όπου $t_0 = \int_0^1 g(t)\,dt$ και ολοκληρώστε.]
Τώρα, αποδείξτε ότι:
(α) $\log\left(\int_0^1 |f|^p\right)^{1/p} \geqslant \int_0^1 \log|f|$ για κάθε $p>0$, χρησιμοποιώντας το προηγούμενο για την $F(t)=e^t$.
(β) $(\int_0^1 |f|^p - 1)/p \geqslant \log\left(\int_0^1 |f|^p\right)^{1/p}$ και $(\int_0^1 |f|^p - 1)/p \to \int_0^1 \log|f|$ όταν $p\to 0^+$.

Για την απόδειξη της

$$\lim_{p\to 0^+}\left(\int_0^1 |f|^p\right)^{1/p} = \exp\left(\int_0^1 \log|f|\right)$$

δείξτε πρώτα ότι: αν μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $F:(a,b)\to\mathbb{R}$ είναι κυρτή και $g:[0,1]\to(a,b)$, g συνεχής, τότε

$$F\Big(\int_0^1 g(t)\,dt\Big) \leqslant \int_0^1 (F\circ g)(t)\,dt.$$

[*Υπόδειξη:* Θεωρήστε την $F(g(x)) - F(t_0) \geqslant F'(t_0)(g(x)-t_0)$ όπου $t_0 = \int_0^1 g(t)\,dt$ και ολοκληρώστε.]
Τώρα, αποδείξτε ότι:
(α) $\log\left(\int_0^1 |f|^p\right)^{1/p} \geqslant \int_0^1 \log|f|$ για κάθε $p>0$, χρησιμοποιώντας το προηγούμενο για την $F(t)=e^t$.
(β) $(\int_0^1 |f|^p - 1)/p \geqslant \log\left(\int_0^1 |f|^p\right)^{1/p}$ και $(\int_0^1 |f|^p - 1)/p \to \int_0^1 \log|f|$ όταν $p\to 0^+$.
(γ) $\lim_{p\to 0^+}\left(\int_0^1 |f|^p\right)^{1/p} = \exp(\int_0^1 \log|f|)$.

Άσκηση 7

Εξετάστε αν συγκλίνει η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\sqrt{n})}{n}.$$

Άσκηση 7

Εξετάστε αν συγκλίνει η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\sqrt{n})}{n}.$$

Χρησιμοποιούμε την ταυτότητα

$$f(n) = \int_n^{n+1} f(x)\,dx - \int_n^{n+1} (n+1-x) f'(x)\,dx.$$

Άσκηση 7

Εξετάστε αν συγκλίνει η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\sqrt{n})}{n}.$$

Χρησιμοποιούμε την ταυτότητα

$$f(n) = \int_n^{n+1} f(x)\,dx - \int_n^{n+1} (n+1-x) f'(x)\,dx.$$

Αυτή μας δίνει, για $n < m$, το φράγμα

$$\left| \sum_{k=n+1}^{m} f(k) \right| \leqslant \left| \int_{n+1}^{m+1} f(x)\,dx \right| + \sum_{k=n+1}^{m} \int_k^{k+1} (k+1-x) |f'(x)|\,dx.$$

Άσκηση 7

Εξετάστε αν συγκλίνει η σειρά
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\sqrt{n})}{n}.$$

Χρησιμοποιούμε την ταυτότητα

$$f(n) = \int_n^{n+1} f(x)\,dx - \int_n^{n+1} (n+1-x) f'(x)\,dx.$$

Αυτή μας δίνει, για $n < m$, το φράγμα

$$\left| \sum_{k=n+1}^{m} f(k) \right| \leqslant \left| \int_{n+1}^{m+1} f(x)\,dx \right| + \sum_{k=n+1}^{m} \int_k^{k+1} (k+1-x) |f'(x)|\,dx.$$

Εδώ παίρνουμε την
$$f(x) = \frac{\sin(\sqrt{x})}{x}.$$

Έχουμε $f'(x) = \frac{\sqrt{x}\cos(\sqrt{x}) - 2\sin(\sqrt{x})}{2x^2}$, άρα για $x \geqslant 1$ παίρνουμε

$$|f'(x)| \leqslant \frac{3}{2x^{3/2}}.$$

Έχουμε $f'(x) = \frac{\sqrt{x}\cos(\sqrt{x}) - 2\sin(\sqrt{x})}{2x^2}$, άρα για $x \geqslant 1$ παίρνουμε

$$|f'(x)| \leqslant \frac{3}{2x^{3/2}}.$$

Τότε,

$$\sum_{k=n+1}^{m} \int_k^{k+1} (k+1-x)|f'(x)|\,dx \leqslant \sum_{k=n+1}^{m} \int_k^{k+1} \frac{3}{2x^{3/2}} \leqslant \frac{3}{2}\int_{n+1}^{\infty} \frac{1}{x^{3/2}}\,dx < \varepsilon$$

αν το n είναι μεγάλο.

Έχουμε $f'(x) = \frac{\sqrt{x}\cos(\sqrt{x}) - 2\sin(\sqrt{x})}{2x^2}$, άρα για $x \geqslant 1$ παίρνουμε

$$|f'(x)| \leqslant \frac{3}{2x^{3/2}}.$$

Τότε,

$$\sum_{k=n+1}^{m} \int_k^{k+1} (k+1-x)|f'(x)|\,dx \leqslant \sum_{k=n+1}^{m} \int_k^{k+1} \frac{3}{2x^{3/2}} \leqslant \frac{3}{2}\int_{n+1}^{\infty} \frac{1}{x^{3/2}}\,dx < \varepsilon$$

αν το n είναι μεγάλο.
Για το άλλο ολοκλήρωμα έχουμε

$$\left|\sum_{k=n+1}^{m} f(k)\right| = 2\left|\int_{\sqrt{n+1}}^{\sqrt{m+1}} \frac{\sin y}{y}\,dy\right| < \varepsilon$$

αν το n είναι μεγάλο (κατά παράγοντες: $\frac{\sin y}{y} = (-\cos y)'\frac{1}{y}$).

Έχουμε $f'(x) = \frac{\sqrt{x}\cos(\sqrt{x}) - 2\sin(\sqrt{x})}{2x^2}$, άρα για $x \geqslant 1$ παίρνουμε

$$|f'(x)| \leqslant \frac{3}{2x^{3/2}}.$$

Τότε,

$$\sum_{k=n+1}^{m} \int_k^{k+1} (k+1-x)|f'(x)|\,dx \leqslant \sum_{k=n+1}^{m} \int_k^{k+1} \frac{3}{2x^{3/2}} \leqslant \frac{3}{2}\int_{n+1}^{\infty} \frac{1}{x^{3/2}}\,dx < \varepsilon$$

αν το n είναι μεγάλο.
Για το άλλο ολοκλήρωμα έχουμε

$$\left|\sum_{k=n+1}^{m} f(k)\right| = 2\left|\int_{\sqrt{n+1}}^{\sqrt{m+1}} \frac{\sin y}{y}\,dy\right| < \varepsilon$$

αν το n είναι μεγάλο (κατά παράγοντες: $\frac{\sin y}{y} = (-\cos y)'\frac{1}{y}$).
Άρα η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της σειράς είναι βασική, και έπεται ότι η σειρά συγκλίνει.

Άσκηση 8

Εξετάστε αν συγκλίνει η σειρά
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\log n)}{n}.$$

Άσκηση 8

Εξετάστε αν συγκλίνει η σειρά
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\log n)}{n}.$$

Θεωρούμε την $f(x) = \frac{\cos(\log x)}{x}$, $x > 0$ και ξεκινάμε πάλι από την
$$\sum_{k=n+1}^{m} f(k) = \int_{n+1}^{m+1} f(x)\, dx + \sum_{k=n+1}^{m} \int_{k}^{k+1} (k+1-x) f'(x)\, dx.$$

Άσκηση 8

Εξετάστε αν συγκλίνει η σειρά
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\log n)}{n}.$$

Θεωρούμε την $f(x) = \frac{\cos(\log x)}{x}$, $x > 0$ και ξεκινάμε πάλι από την
$$\sum_{k=n+1}^{m} f(k) = \int_{n+1}^{m+1} f(x)\,dx + \sum_{k=n+1}^{m} \int_{k}^{k+1} (k+1-x) f'(x)\,dx.$$

Τώρα γράφουμε
$$\left| \sum_{k=n+1}^{m} f(k) \right| \geqslant \left| \int_{n+1}^{m+1} f(x)\,dx \right| - \sum_{k=n+1}^{m} \int_{k}^{k+1} (k+1-x) |f'(x)|\,dx.$$

Άσκηση 8

Εξετάστε αν συγκλίνει η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\log n)}{n}.$$

Θεωρούμε την $f(x) = \frac{\cos(\log x)}{x}$, $x > 0$ και ξεκινάμε πάλι από την

$$\sum_{k=n+1}^{m} f(k) = \int_{n+1}^{m+1} f(x)\,dx + \sum_{k=n+1}^{m} \int_{k}^{k+1} (k+1-x) f'(x)\,dx.$$

Τώρα γράφουμε

$$\left|\sum_{k=n+1}^{m} f(k)\right| \geqslant \left|\int_{n+1}^{m+1} f(x)\,dx\right| - \sum_{k=n+1}^{m} \int_{k}^{k+1} (k+1-x)|f'(x)|\,dx.$$

Έχουμε $f'(x) = \frac{-\sin(\log x) - \cos(\log x)}{x^2}$, άρα για $x \geqslant 1$ παίρνουμε

$$|f'(x)| \leqslant \frac{2}{x^2}.$$

Άσκηση 8

Εξετάστε αν συγκλίνει η σειρά
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\log n)}{n}.$$

Θεωρούμε την $f(x) = \frac{\cos(\log x)}{x}$, $x > 0$ και ξεκινάμε πάλι από την
$$\sum_{k=n+1}^{m} f(k) = \int_{n+1}^{m+1} f(x)\,dx + \sum_{k=n+1}^{m} \int_{k}^{k+1} (k+1-x) f'(x)\,dx.$$

Τώρα γράφουμε
$$\left| \sum_{k=n+1}^{m} f(k) \right| \geqslant \left| \int_{n+1}^{m+1} f(x)\,dx \right| - \sum_{k=n+1}^{m} \int_{k}^{k+1} (k+1-x) |f'(x)|\,dx.$$

Έχουμε $f'(x) = \frac{-\sin(\log x) - \cos(\log x)}{x^2}$, άρα για $x \geqslant 1$ παίρνουμε
$$|f'(x)| \leqslant \frac{2}{x^2}.$$

Τότε,
$$\sum_{k=n+1}^{m} \int_{k}^{k+1} (k+1-x) |f'(x)|\,dx \leqslant \sum_{k=n+1}^{m} \int_{k}^{k+1} \frac{2}{x^2} \leqslant 2 \int_{n+1}^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \frac{2}{n+1}.$$

Θεωρούμε $s \in \mathbb{N}$, το οποίο θα υποθέσουμε μετά μεγάλο, και τις διαδοχικές ρίζες

$$r_s = e^{s\pi+\pi/2} \quad \text{και} \quad t_s = e^{s\pi+\pi/2}$$

της f.

Θεωρούμε $s \in \mathbb{N}$, το οποίο θα υποθέσουμε μετά μεγάλο, και τις διαδοχικές ρίζες

$$r_s = e^{s\pi + \pi/2} \quad \text{και} \quad t_s = e^{s\pi + \pi/2}$$

της f.
Αν θέσουμε $n(s) = \lfloor r_s \rfloor$ και $m(s) = \lfloor t_s \rfloor - 1$,τότε

$$\left| \int_{n(s)+1}^{m(s)+1} f(x)dx \right| \geqslant \left| \int_{r_s}^{t_s} f(x)dx \right| - 2e^{-s\pi} = 2 - 2e^{-s\pi}.$$

Θεωρούμε $s \in \mathbb{N}$, το οποίο θα υποθέσουμε μετά μεγάλο, και τις διαδοχικές ρίζες

$$r_s = e^{s\pi+\pi/2} \quad \text{και} \quad t_s = e^{s\pi+\pi/2}$$

της f.
Αν θέσουμε $n(s) = \lfloor r_s \rfloor$ και $m(s) = \lfloor t_s \rfloor - 1$,τότε

$$\left| \int_{n(s)+1}^{m(s)+1} f(x)dx \right| \geqslant \left| \int_{r_s}^{t_s} f(x)dx \right| - 2e^{-s\pi} = 2 - 2e^{-s\pi}.$$

Άρα,

$$\left| \sum_{n(s)+1}^{m(s)+1} f(k) \right| > 2 - 2e^{-s\pi} - \frac{2}{n(s)+1} > 1$$

αν το s είναι αρκετά μεγάλο.

Θεωρούμε $s \in \mathbb{N}$, το οποίο θα υποθέσουμε μετά μεγάλο, και τις διαδοχικές ρίζες

$$r_s = e^{s\pi + \pi/2} \quad \text{και} \quad t_s = e^{s\pi + \pi/2}$$

της f.
Αν θέσουμε $n(s) = \lfloor r_s \rfloor$ και $m(s) = \lfloor t_s \rfloor - 1$,τότε

$$\left| \int_{n(s)+1}^{m(s)+1} f(x)dx \right| \geqslant \left| \int_{r_s}^{t_s} f(x)dx \right| - 2e^{-s\pi} = 2 - 2e^{-s\pi}.$$

Άρα,

$$\left| \sum_{n(s)+1}^{m(s)+1} f(k) \right| > 2 - 2e^{-s\pi} - \frac{2}{n(s)+1} > 1$$

αν το s είναι αρκετά μεγάλο.
Η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\log n)}{n}$ δεν είναι βασική, άρα η σειρά αποκλίνει.

Άσκηση 9

Έστω $\mathcal{C}$ η οικογένεια όλων των $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ που έχουν συνεχή παράγωγο και ικανοποιούν τις $f(0) = 0$ και $f(1) = 1$. Να βρεθεί το

$$\inf \left\{ \int_0^1 |f'(t) - f(t)| \, dt : f \in \mathcal{C} \right\}.$$

Άσκηση 9

Έστω $\mathcal{C}$ η οικογένεια όλων των $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ που έχουν συνεχή παράγωγο και ικανοποιούν τις $f(0) = 0$ και $f(1) = 1$. Να βρεθεί το

$$\inf \left\{ \int_0^1 |f'(t) - f(t)| \, dt : f \in \mathcal{C} \right\}.$$

Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνάρτηση με συνεχή παράγωγο που ικανοποιεί τις $f(0) = 0$ και $f(1) = 1$. Παρατηρούμε ότι

$$e^x (f(x) e^{-x})' = f'(x) - f(x).$$

Άσκηση 9

Έστω $\mathcal{C}$ η οικογένεια όλων των $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ που έχουν συνεχή παράγωγο και ικανοποιούν τις $f(0) = 0$ και $f(1) = 1$. Να βρεθεί το

$$\inf \left\{ \int_0^1 |f'(t) - f(t)|\, dt : f \in \mathcal{C} \right\}.$$

Έστω $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ συνάρτηση με συνεχή παράγωγο που ικανοποιεί τις $f(0) = 0$ και $f(1) = 1$. Παρατηρούμε ότι

$$e^x (f(x)e^{-x})' = f'(x) - f(x).$$

Άρα,

$$\begin{aligned}\int_0^1 |f'(x) - f(x)|\, dx &= \int_0^1 e^x |(f(x)e^{-x})'|\, dx \geqslant \int_0^1 |(f(x)e^{-x})'|\, dx \\ &\geqslant \int_0^1 (f(x)e^{-x})' dx = \frac{f(1)}{e} - \frac{f(0)}{1} = \frac{1}{e}.\end{aligned}$$

Άσκηση 9

Έστω $\mathcal{C}$ η οικογένεια όλων των $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ που έχουν συνεχή παράγωγο και ικανοποιούν τις $f(0) = 0$ και $f(1) = 1$. Να βρεθεί το

$$\inf\left\{\int_0^1 |f'(t) - f(t)|\, dt : f \in \mathcal{C}\right\}.$$

Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνάρτηση με συνεχή παράγωγο που ικανοποιεί τις $f(0) = 0$ και $f(1) = 1$. Παρατηρούμε ότι

$$e^x (f(x)e^{-x})' = f'(x) - f(x).$$

Άρα,

$$\begin{aligned}\int_0^1 |f'(x) - f(x)|\, dx &= \int_0^1 e^x |(f(x)e^{-x})'|\, dx \geqslant \int_0^1 |(f(x)e^{-x})'|\, dx \\ &\geqslant \int_0^1 (f(x)e^{-x})' dx = \frac{f(1)}{e} - \frac{f(0)}{1} = \frac{1}{e}.\end{aligned}$$

Δηλαδή,

$$\inf\left\{\int_0^1 |f'(t) - f(t)|\, dt : f \in \mathcal{C}\right\} \geqslant \frac{1}{e}.$$

Για να δούμε ότι αυτό είναι το infimum θεωρούμε $\delta \in (0,1)$, το οποίο θα πάρουμε να τείνει στο 0, και μια συνάρτηση $f = f_\delta : [0,1] \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε:

1. $f(x) = e^{x-1}$ στο $[\delta, 1]$,
2. f γνησίως αύξουσα στο $[0, \delta]$, με $f(0) = 0$, $f(\delta) = e^{\delta-1}$ και $f'(\delta) = e^{\delta-1}$ (της μορφής $f(x) = \alpha_\delta x + b_\delta x^2$).

Για να δούμε ότι αυτό είναι το infimum θεωρούμε $\delta \in (0,1)$, το οποίο θα πάρουμε να τείνει στο 0, και μια συνάρτηση $f = f_\delta : [0,1] \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε:

1. $f(x) = e^{x-1}$ στο $[\delta, 1]$,
2. f γνησίως αύξουσα στο $[0, \delta]$, με $f(0) = 0$, $f(\delta) = e^{\delta-1}$ και $f'(\delta) = e^{\delta-1}$ (της μορφής $f(x) = \alpha_\delta x + b_\delta x^2$).

Αφού $f' - f = 0$ στο $[\delta, 1]$, έχουμε

$$\begin{aligned}\int_0^1 |f'(x) - f(x)|\, dx &= \int_0^\delta |f'(x) - f(x)|\, dx \\ &\leqslant \int_0^\delta f'(x)dx + \int_0^\delta f(x)dx \leqslant f(\delta) + \delta f(\delta) = (1+\delta)e^{\delta-1}.\end{aligned}$$

Για να δούμε ότι αυτό είναι το infimum θεωρούμε $\delta \in (0,1)$, το οποίο θα πάρουμε να τείνει στο 0, και μια συνάρτηση $f = f_\delta : [0,1] \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε:

1. $f(x) = e^{x-1}$ στο $[\delta, 1]$,
2. f γνησίως αύξουσα στο $[0,\delta]$, με $f(0)=0$, $f(\delta) = e^{\delta-1}$ και $f'(\delta) = e^{\delta-1}$ (της μορφής $f(x) = \alpha_\delta x + b_\delta x^2$).

Αφού $f' - f = 0$ στο $[\delta, 1]$, έχουμε

$$\begin{aligned}\int_0^1 |f'(x) - f(x)|\, dx &= \int_0^\delta |f'(x) - f(x)|\, dx \\ &\leqslant \int_0^\delta f'(x) dx + \int_0^\delta f(x) dx \leqslant f(\delta) + \delta f(\delta) = (1+\delta)e^{\delta-1}.\end{aligned}$$

Άρα,

$$\inf\left\{\int_0^1 |f'(t) - f(t)|\, dt : f \in \mathcal{C}\right\} \leqslant \lim_{\delta\to 0}(1+\delta)e^{\delta-1} = \frac{1}{e}.$$

Άσκηση 10

Έστω (α_n) ακολουθία με $0 < \alpha_n < 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{\log(1/\alpha_n)}$ συγκλίνει τότε η σειρά $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\alpha_n}{\log n}$ συγκλίνει.

Άσκηση 10

Έστω (α_n) ακολουθία με $0 < \alpha_n < 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{\log(1/\alpha_n)}$ συγκλίνει τότε η σειρά $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\alpha_n}{\log n}$ συγκλίνει.

Γράφυμε

$$\frac{\alpha_n}{\log n} = \frac{\alpha_n}{\log(1/\alpha_n)} \cdot \frac{\log(1/\alpha_n)}{\log n}.$$

Άσκηση 10

Έστω (α_n) ακολουθία με $0 < \alpha_n < 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{\log(1/\alpha_n)}$ συγκλίνει τότε η σειρά $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\alpha_n}{\log n}$ συγκλίνει.

Γράφυμε

$$\frac{\alpha_n}{\log n} = \frac{\alpha_n}{\log(1/\alpha_n)} \cdot \frac{\log(1/\alpha_n)}{\log n}.$$

Αν $\frac{\log(1/\alpha_n)}{\log n} \leqslant 2$ τότε

$$\frac{\alpha_n}{\log n} \leqslant 2\frac{\alpha_n}{\log(1/\alpha_n)}.$$

Άσκηση 10

Έστω (α_n) ακολουθία με $0 < \alpha_n < 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{\log(1/\alpha_n)}$ συγκλίνει τότε η σειρά $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\alpha_n}{\log n}$ συγκλίνει.

Γράφουμε

$$\frac{\alpha_n}{\log n} = \frac{\alpha_n}{\log(1/\alpha_n)} \cdot \frac{\log(1/\alpha_n)}{\log n}.$$

Αν $\frac{\log(1/\alpha_n)}{\log n} \leqslant 2$ τότε

$$\frac{\alpha_n}{\log n} \leqslant 2\frac{\alpha_n}{\log(1/\alpha_n)}.$$

Αν $\frac{\log(1/\alpha_n)}{\log n} \geqslant 2$ τότε $\alpha_n \leqslant \frac{1}{n^2}$, άρα

$$\frac{\alpha_n}{\log n} \leqslant \frac{1}{n^2 \log n}.$$

Άσκηση 10

Έστω (α_n) ακολουθία με $0 < \alpha_n < 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{\log(1/\alpha_n)}$ συγκλίνει τότε η σειρά $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\alpha_n}{\log n}$ συγκλίνει.

Γράφουμε

$$\frac{\alpha_n}{\log n} = \frac{\alpha_n}{\log(1/\alpha_n)} \cdot \frac{\log(1/\alpha_n)}{\log n}.$$

Αν $\frac{\log(1/\alpha_n)}{\log n} \leqslant 2$ τότε

$$\frac{\alpha_n}{\log n} \leqslant 2\frac{\alpha_n}{\log(1/\alpha_n)}.$$

Αν $\frac{\log(1/\alpha_n)}{\log n} \geqslant 2$ τότε $\alpha_n \leqslant \frac{1}{n^2}$, άρα

$$\frac{\alpha_n}{\log n} \leqslant \frac{1}{n^2 \log n}.$$

Δηλαδή, για κάθε $n \geqslant 2$ έχουμε

$$\frac{\alpha_n}{\log n} \leqslant 2\frac{\alpha_n}{\log(1/\alpha_n)} + \frac{1}{n^2 \log n}.$$

Άσκηση 10

Έστω (α_n) ακολουθία με $0 < \alpha_n < 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{\log(1/\alpha_n)}$ συγκλίνει τότε η σειρά $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\alpha_n}{\log n}$ συγκλίνει.

Γράφουμε

$$\frac{\alpha_n}{\log n} = \frac{\alpha_n}{\log(1/\alpha_n)} \cdot \frac{\log(1/\alpha_n)}{\log n}.$$

Αν $\frac{\log(1/\alpha_n)}{\log n} \leqslant 2$ τότε

$$\frac{\alpha_n}{\log n} \leqslant 2\frac{\alpha_n}{\log(1/\alpha_n)}.$$

Αν $\frac{\log(1/\alpha_n)}{\log n} \geqslant 2$ τότε $\alpha_n \leqslant \frac{1}{n^2}$, άρα

$$\frac{\alpha_n}{\log n} \leqslant \frac{1}{n^2 \log n}.$$

Δηλαδή, για κάθε $n \geqslant 2$ έχουμε

$$\frac{\alpha_n}{\log n} \leqslant 2\frac{\alpha_n}{\log(1/\alpha_n)} + \frac{1}{n^2 \log n}.$$

Άρα, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{\log(n+1)}$ συγκλίνει.

Άσκηση 11

Έστω $a, b > 0$. Να βρεθεί το

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}(a+kb)}{\prod_{k=0}^{n}(a+kb)^{1/n}}.$$

Άσκηση 11

Έστω $a, b > 0$. Να βρεθεί το

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}(a+kb)}{\prod_{k=0}^{n}(a+kb)^{1/n}}.$$

Γράφοντας $x_n \sim y_n$ εννοούμε ότι $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = 1$.

Άσκηση 11

Έστω $a, b > 0$. Να βρεθεί το

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}(a+kb)}{\prod_{k=0}^{n}(a+kb)^{1/n}}.$$

Γράφοντας $x_n \sim y_n$ εννοούμε ότι $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = 1$.

Έχουμε

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}(a+kb) = \frac{n+1}{n}a + \frac{n+1}{2}b \sim \frac{n+1}{2}b.$$

Άσκηση 11

Έστω $a, b > 0$. Να βρεθεί το

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}(a+kb)}{\prod_{k=0}^{n}(a+kb)^{1/n}}.$$

Γράφοντας $x_n \sim y_n$ εννοούμε ότι $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = 1$.

Έχουμε

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}(a+kb) = \frac{n+1}{n}a + \frac{n+1}{2}b \sim \frac{n+1}{2}b.$$

Επίσης,

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\big(\log(a+kb) - \log(kb)\big) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log\left(1+\frac{a}{kb}\right) \\ &\leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{a}{kb} \leqslant \frac{ca\log n}{bn}. \end{aligned}$$

Άρα,

$$\sqrt[n]{a} \leqslant \frac{\prod_{k=0}^{n}(a+kb)^{1/n}}{\prod_{k=1}^{n}(kb)^{1/n}} \leqslant \sqrt[n]{a}\exp\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\big(\log(a+kb)-\log(kb)\big)\right)$$
$$\leqslant \sqrt[n]{a}\exp\left(\frac{ca\log n}{bn}\right) \to 1,$$

δηλαδή

$$\prod_{k=0}^{n}(a+kb)^{1/n} \sim \prod_{k=1}^{n}(kb)^{1/n} = (n!)^{1/n}b.$$

Άρα,

$$\sqrt[n]{a} \leqslant \frac{\prod_{k=0}^{n}(a+kb)^{1/n}}{\prod_{k=1}^{n}(kb)^{1/n}} \leqslant \sqrt[n]{a}\exp\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\big(\log(a+kb)-\log(kb)\big)\right)$$
$$\leqslant \sqrt[n]{a}\exp\left(\frac{ca\log n}{bn}\right) \to 1,$$

δηλαδή

$$\prod_{k=0}^{n}(a+kb)^{1/n} \sim \prod_{k=1}^{n}(kb)^{1/n} = (n!)^{1/n}b.$$

Τώρα,

$$\frac{\prod_{k=0}^{n}(a+kb)^{1/n}}{\prod_{k=1}^{n}(kb)^{1/n}} \sim \frac{\frac{n+1}{2}b}{(n!)^{1/n}b} \to \frac{e}{2},$$

διότι

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n!)^{1/n}}{n} = \frac{1}{e}.$$

Άσκηση 12

Έστω (α_n) φραγμένη ακολουθία τέτοια ώστε $\alpha_n + \frac{\alpha_{2n}}{2} \to 1$. Αποδείξτε ότι η (α_n) συγκλίνει και βρείτε το όριό της.

Άσκηση 12

Έστω (α_n) φραγμένη ακολουθία τέτοια ώστε $\alpha_n + \frac{\alpha_{2n}}{2} \to 1$. Αποδείξτε ότι η (α_n) συγκλίνει και βρείτε το όριό της.

Παρατηρούμε αρχικά ότι αν $\alpha_n \to \ell$ τότε αναγκαστικά $\ell = \frac{2}{3}$.

Άσκηση 12

Έστω (α_n) φραγμένη ακολουθία τέτοια ώστε $\alpha_n + \frac{\alpha_{2n}}{2} \to 1$. Αποδείξτε ότι η (α_n) συγκλίνει και βρείτε το όριό της.

Παρατηρούμε αρχικά ότι αν $\alpha_n \to \ell$ τότε αναγκαστικά $\ell = \frac{2}{3}$.
Έστω ότι $\alpha_n \not\to \frac{2}{3}$. Τότε, υπάρχει υπακολουθία (α_{k_n}) της (α_n) με $\alpha_{k_n} \to s \neq \frac{2}{3}$.

Άσκηση 12

Έστω (α_n) φραγμένη ακολουθία τέτοια ώστε $\alpha_n + \frac{\alpha_{2n}}{2} \to 1$. Αποδείξτε ότι η (α_n) συγκλίνει και βρείτε το όριό της.

Παρατηρούμε αρχικά ότι αν $\alpha_n \to \ell$ τότε αναγκαστικά $\ell = \frac{2}{3}$.
Έστω ότι $\alpha_n \not\to \frac{2}{3}$. Τότε, υπάρχει υπακολουθία (α_{k_n}) της (α_n) με $\alpha_{k_n} \to s \neq \frac{2}{3}$.
Αφού $\alpha_n + \frac{\alpha_{2n}}{2} \to 1$ έπεται ότι

$$\alpha_{2k_n} \to 2(1-s).$$

Άσκηση 12

Έστω (α_n) φραγμένη ακολουθία τέτοια ώστε $\alpha_n + \frac{\alpha_{2n}}{2} \to 1$. Αποδείξτε ότι η (α_n) συγκλίνει και βρείτε το όριό της.

Παρατηρούμε αρχικά ότι αν $\alpha_n \to \ell$ τότε αναγκαστικά $\ell = \frac{2}{3}$.
Έστω ότι $\alpha_n \not\to \frac{2}{3}$. Τότε, υπάρχει υπακολουθία (α_{k_n}) της (α_n) με $\alpha_{k_n} \to s \neq \frac{2}{3}$.
Αφού $\alpha_n + \frac{\alpha_{2n}}{2} \to 1$ έπεται ότι

$$\alpha_{2k_n} \to 2(1-s).$$

Όμοια,

$$\alpha_{4k_n} \to 2(1-2(1-s))$$

και ούτω καθεξής.

Άσκηση 12

Έστω (α_n) φραγμένη ακολουθία τέτοια ώστε $\alpha_n + \frac{\alpha_{2n}}{2} \to 1$. Αποδείξτε ότι η (α_n) συγκλίνει και βρείτε το όριό της.

Παρατηρούμε αρχικά ότι αν $\alpha_n \to \ell$ τότε αναγκαστικά $\ell = \frac{2}{3}$.
Έστω ότι $\alpha_n \not\to \frac{2}{3}$. Τότε, υπάρχει υπακολουθία (α_{k_n}) της (α_n) με $\alpha_{k_n} \to s \neq \frac{2}{3}$.
Αφού $\alpha_n + \frac{\alpha_{2n}}{2} \to 1$ έπεται ότι

$$\alpha_{2k_n} \to 2(1-s).$$

Όμοια,

$$\alpha_{4k_n} \to 2(1-2(1-s))$$

και ούτω καθεξής. Δηλαδή, αν ορίσουμε

$$y_0 = s \quad \text{και} \quad y_{r+1} = 2(1-y_r), \quad r \geqslant 1$$

τότε

$$\alpha_{2^r k_n} \to y_r.$$

Αφού η (α_n) είναι φραγμένη και

$$y_r = \lim_{n\to\infty} \alpha_{2^r k_n},$$

έχουμε ότι η (y_r) είναι φραγμένη.

Αφού η (α_n) είναι φραγμένη και

$$y_r = \lim_{n\to\infty} \alpha_{2^r k_n},$$

έχουμε ότι η (y_r) είναι φραγμένη.
Όμως, η $y_{r+1} = 2(1-y)r)$ γράφεται

$$y_{r+1} - \frac{2}{3} = -2\left(y_r - \frac{2}{3}\right).$$

Αφού η (α_n) είναι φραγμένη και

$$y_r = \lim_{n\to\infty} \alpha_{2^r k_n},$$

έχουμε ότι η (y_r) είναι φραγμένη.
Όμως, η $y_{r+1} = 2(1 - y)r)$ γράφεται

$$y_{r+1} - \frac{2}{3} = -2\left(y_r - \frac{2}{3}\right).$$

Άρα,

$$\left|y_r - \frac{2}{3}\right| = 2^r \left|y_0 - \frac{2}{3}\right| \to +\infty,$$

άρα

$$|y_r| \to +\infty,$$

το οποίο είναι άτοπο.

Άσκηση 13

Έστω $f:[0,1]\to[0,1]$ φθίνουσα, παραγωγίσιμη στο 0, με $f(0)=1$ και $f'(0)<0$. Να βρεθεί το

$$\lim_{n\to\infty} n\int_0^1 f^n(x)\,dx.$$

Άσκηση 13

Έστω $f : [0,1] \to [0,1]$ φθίνουσα, παραγωγίσιμη στο 0, με $f(0) = 1$ και $f'(0) < 0$. Να βρεθεί το

$$\lim_{n\to\infty} n \int_0^1 f^n(x)\, dx.$$

Από τον ορισμό της παραγώγου στο 0 έχουμε

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - 1 - xf'(0)}{x} = 0,$$

Άσκηση 13

Έστω $f : [0,1] \to [0,1]$ φθίνουσα, παραγωγίσιμη στο 0, με $f(0) = 1$ και $f'(0) < 0$. Να βρεθεί το

$$\lim_{n\to\infty} n \int_0^1 f^n(x)\, dx.$$

Από τον ορισμό της παραγώγου στο 0 έχουμε

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - 1 - xf'(0)}{x} = 0,$$

άρα, για τυχόν $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}|f'(0)|$ υπάρχει $\delta \in (0,1)$ ώστε: για κάθε $x \in [0,\delta]$,

$$0 \leqslant 1 + x(f'(0) - \varepsilon) \leqslant f(x) \leqslant 1 + x(f'(0) + \varepsilon).$$

Άσκηση 13

Έστω $f:[0,1]\to[0,1]$ φθίνουσα, παραγωγίσιμη στο 0, με $f(0)=1$ και $f'(0)<0$. Να βρεθεί το

$$\lim_{n\to\infty} n\int_0^1 f^n(x)\,dx.$$

Από τον ορισμό της παραγώγου στο 0 έχουμε

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-1-xf'(0)}{x}=0,$$

άρα, για τυχόν $0<\varepsilon<\frac{1}{2}|f'(0)|$ υπάρχει $\delta\in(0,1)$ ώστε: για κάθε $x\in[0,\delta]$,

$$0\leqslant 1+x(f'(0)-\varepsilon)\leqslant f(x)\leqslant 1+x(f'(0)+\varepsilon).$$

Τότε, για κάθε $n\in\mathbb{N}$ και για κάθε $x\in[0,\delta]$,

$$0\leqslant\left(1+x(f'(0)-\varepsilon)\right)^n\leqslant f^n(x)\leqslant\left(1+x(f'(0)+\varepsilon)\right)^n.$$

Άσκηση 13

Έστω $f : [0,1] \to [0,1]$ φθίνουσα, παραγωγίσιμη στο 0, με $f(0) = 1$ και $f'(0) < 0$. Να βρεθεί το

$$\lim_{n\to\infty} n \int_0^1 f^n(x)\, dx.$$

Από τον ορισμό της παραγώγου στο 0 έχουμε

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - 1 - xf'(0)}{x} = 0,$$

άρα, για τυχόν $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}|f'(0)|$ υπάρχει $\delta \in (0,1)$ ώστε: για κάθε $x \in [0,\delta]$,

$$0 \leqslant 1 + x(f'(0) - \varepsilon) \leqslant f(x) \leqslant 1 + x(f'(0) + \varepsilon).$$

Τότε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε $x \in [0,\delta]$,

$$0 \leqslant \left(1 + x(f'(0) - \varepsilon)\right)^n \leqslant f^n(x) \leqslant \left(1 + x(f'(0) + \varepsilon)\right)^n.$$

Παρατηρούμε επίσης ότι για κάθε $\delta < x < 1$ έχουμε

$$0 \leqslant f(x) \leqslant f(\delta) < 1.$$

Γράφουμε

$$n \int_0^1 f^n(x)\,dx = n \int_0^\delta f^n(x)\,dx + n \int_\delta^1 f^n(x)\,dx.$$

Γράφουμε

$$n\int_0^1 f^n(x)\,dx = n\int_0^\delta f^n(x)\,dx + n\int_\delta^1 f^n(x)\,dx.$$

Το δεύτερο ολοκλήρωμα φράσσεται ως εξής:

$$0 \leqslant n\int_\delta^1 f^n(x)\,dx \leqslant (1-\delta)n[f(\delta)]^n \to 0.$$

Γράφουμε

$$n\int_0^1 f^n(x)\,dx = n\int_0^\delta f^n(x)\,dx + n\int_\delta^1 f^n(x)\,dx.$$

Το δεύτερο ολοκλήρωμα φράσσεται ως εξής:

$$0 \leqslant n\int_\delta^1 f^n(x)\,dx \leqslant (1-\delta)n[f(\delta)]^n \to 0.$$

Για το πρώτο έχουμε

$$n\int_0^\delta \big(1+x(f'(0)-\varepsilon)\big)^n\,dx \leqslant n\int_0^\delta f^n(x)\,dx \leqslant n\int_0^\delta \big(1+x(f'(0)+\varepsilon)\big)^n\,dx.$$

Γράφουμε

$$n\int_0^1 f^n(x)\,dx = n\int_0^\delta f^n(x)\,dx + n\int_\delta^1 f^n(x)\,dx.$$

Το δεύτερο ολοκλήρωμα φράσσεται ως εξής:

$$0 \leqslant n\int_\delta^1 f^n(x)\,dx \leqslant (1-\delta)n[f(\delta)]^n \to 0.$$

Για το πρώτο έχουμε

$$n\int_0^\delta \big(1+x(f'(0)-\varepsilon)\big)^n\,dx \leqslant n\int_0^\delta f^n(x)\,dx \leqslant n\int_0^\delta \big(1+x(f'(0)+\varepsilon)\big)^n\,dx.$$

Δηλαδή,

$$\frac{n}{(n+1)(f'(0)-\varepsilon)}\left(\big(1+\delta(f'(0)-\varepsilon)\big)^{n+1}-1\right)$$
$$\leqslant n\int_0^\delta f^n(x)\,dx \leqslant \frac{n}{(n+1)(f'(0)+\varepsilon)}\left(\big(1+\delta(f'(0)+\varepsilon)\big)^{n+1}-1\right).$$

Παρατηρούμε ότι

$$0 < 1 + \delta(f'(0) - \varepsilon) < 1 + \delta(f'(0) + \varepsilon) < 1.$$

Παρατηρούμε ότι

$$0 < 1 + \delta(f'(0) - \varepsilon) < 1 + \delta(f'(0) + \varepsilon) < 1.$$

Υπολογίζουμε τα

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{(n+1)(f'(0) - \varepsilon)} \left(\left(1 + \delta(f'(0) - \varepsilon)\right)^{n+1} - 1 \right) = -\frac{1}{f'(0) - \varepsilon}$$

και

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{(n+1)(f'(0) + \varepsilon)} \left(\left(1 + \delta(f'(0) + \varepsilon)\right)^{n+1} - 1 \right) = -\frac{1}{f'(0) + \varepsilon}.$$

Παρατηρούμε ότι

$$0 < 1 + \delta(f'(0) - \varepsilon) < 1 + \delta(f'(0) + \varepsilon) < 1.$$

Υπολογίζουμε τα

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{(n+1)(f'(0)-\varepsilon)} \left((1 + \delta(f'(0) - \varepsilon))^{n+1} - 1 \right) = -\frac{1}{f'(0)-\varepsilon}$$

και

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{(n+1)(f'(0)+\varepsilon)} \left((1 + \delta(f'(0) + \varepsilon))^{n+1} - 1 \right) = -\frac{1}{f'(0)+\varepsilon}.$$

Άρα,

$$-\frac{1}{f'(0)-\varepsilon} \leqslant \liminf_n n \int_0^\delta f^n(x)\, dx \leqslant \limsup_n n \int_0^\delta f^n(x)\, dx \leqslant -\frac{1}{f'(0)+\varepsilon}.$$

Παρατηρούμε ότι

$$0 < 1 + \delta(f'(0) - \varepsilon) < 1 + \delta(f'(0) + \varepsilon) < 1.$$

Υπολογίζουμε τα

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{(n+1)(f'(0)-\varepsilon)} \left(\left(1 + \delta(f'(0)-\varepsilon)\right)^{n+1} - 1 \right) = -\frac{1}{f'(0)-\varepsilon}$$

και

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{(n+1)(f'(0)+\varepsilon)} \left(\left(1 + \delta(f'(0)+\varepsilon)\right)^{n+1} - 1 \right) = -\frac{1}{f'(0)+\varepsilon}.$$

Άρα,

$$-\frac{1}{f'(0)-\varepsilon} \leqslant \liminf_n n \int_0^\delta f^n(x)\,dx \leqslant \limsup_n n \int_0^\delta f^n(x)\,dx \leqslant -\frac{1}{f'(0)+\varepsilon}.$$

Αφήνοντας το $\varepsilon \to 0^+$ έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} n \int_0^\delta f^n(x)\,dx = -\frac{1}{f'(0)}.$$

Άσκηση 14

Έστω $f : [1, +\infty) \to (0, +\infty)$ συνεχής συνάρτηση και $\gamma > 0$ ώστε

$$\int_1^t f(x)\,dx \leqslant \gamma t^2$$

για κάθε $t > 1$. Αποδείξτε ότι

$$\int_1^\infty \frac{1}{f(x)}\,dx = \infty.$$

Άσκηση 14

Έστω $f : [1, +\infty) \to (0, +\infty)$ συνεχής συνάρτηση και $\gamma > 0$ ώστε

$$\int_1^t f(x)\, dx \leqslant \gamma t^2$$

για κάθε $t > 1$. Αποδείξτε ότι

$$\int_1^\infty \frac{1}{f(x)}\, dx = \infty.$$

Για κάθε $1 \leqslant a < b$, από την ανισότητα Cauchy-Schwarz έχουμε

$$(b-a)^2 = \left(\int_a^b \mathbf{1}\, dx\right)^2 \leqslant \left(\int_a^b f(x) dx\right)\left(\int_a^b \frac{1}{f(x)} dx\right)$$

Άσκηση 14

Έστω $f : [1, +\infty) \to (0, +\infty)$ συνεχής συνάρτηση και $\gamma > 0$ ώστε

$$\int_1^t f(x)\,dx \leqslant \gamma t^2$$

για κάθε $t > 1$. Αποδείξτε ότι

$$\int_1^\infty \frac{1}{f(x)}\,dx = \infty.$$

Για κάθε $1 \leqslant a < b$, από την ανισότητα Cauchy-Schwarz έχουμε

$$(b-a)^2 = \left(\int_a^b \mathbf{1}\,dx\right)^2 \leqslant \left(\int_a^b f(x)dx\right)\left(\int_a^b \frac{1}{f(x)}dx\right)$$

και

$$\int_a^b f(x)dx \leqslant \int_1^b f(x)dx \leqslant \gamma b^2,$$

Άσκηση 14

Έστω $f : [1, +\infty) \to (0, +\infty)$ συνεχής συνάρτηση και $\gamma > 0$ ώστε

$$\int_1^t f(x)\, dx \leqslant \gamma t^2$$

για κάθε $t > 1$. Αποδείξτε ότι

$$\int_1^\infty \frac{1}{f(x)}\, dx = \infty.$$

Για κάθε $1 \leqslant a < b$, από την ανισότητα Cauchy-Schwarz έχουμε

$$(b-a)^2 = \left(\int_a^b \mathbf{1}\, dx\right)^2 \leqslant \left(\int_a^b f(x) dx\right)\left(\int_a^b \frac{1}{f(x)} dx\right)$$

και

$$\int_a^b f(x) dx \leqslant \int_1^b f(x) dx \leqslant \gamma b^2,$$

δηλαδή

$$(b-a)^2 \leqslant \gamma b^2 \int_a^b \frac{1}{f(x)} dx.$$

Παίρνοντας $a = 2^j$ και $b = 2^{j+1}$ έχουμε

$$2^{2j} \leqslant \gamma 2^{2(j+1)} \int_{2^j}^{2^{j+1}} \frac{1}{f(x)}\, dx,$$

Παίρνοντας $a = 2^j$ και $b = 2^{j+1}$ έχουμε

$$2^{2j} \leqslant \gamma 2^{2(j+1)} \int_{2^j}^{2^{j+1}} \frac{1}{f(x)} dx,$$

δηλαδή

$$\int_{2^j}^{2^{j+1}} \frac{1}{f(x)} dx \geqslant \frac{1}{4\gamma}$$

για κάθε $j = 0, 1, 2, \ldots$.

Παίρνοντας $a = 2^j$ και $b = 2^{j+1}$ έχουμε

$$2^{2j} \leqslant \gamma 2^{2(j+1)} \int_{2^j}^{2^{j+1}} \frac{1}{f(x)}\,dx,$$

δηλαδή

$$\int_{2^j}^{2^{j+1}} \frac{1}{f(x)}\,dx \geqslant \frac{1}{4\gamma}$$

για κάθε $j = 0, 1, 2, \ldots$.
Άρα,

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{f(x)}\,dx \geqslant \sum_{j=0}^{n-1} \int_{2^j}^{2^{j+1}} \frac{1}{f(x)}\,dx \geqslant \frac{n}{4\gamma}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Παίρνοντας $a = 2^j$ και $b = 2^{j+1}$ έχουμε

$$2^{2j} \leqslant \gamma 2^{2(j+1)} \int_{2^j}^{2^{j+1}} \frac{1}{f(x)}dx,$$

δηλαδή

$$\int_{2^j}^{2^{j+1}} \frac{1}{f(x)}dx \geqslant \frac{1}{4\gamma}$$

για κάθε $j = 0, 1, 2, \ldots$.
Άρα,

$$\int_1^\infty \frac{1}{f(x)}dx \geqslant \sum_{j=0}^{n-1} \int_{2^j}^{2^{j+1}} \frac{1}{f(x)}\, dx \geqslant \frac{n}{4\gamma}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$.Συνεπώς,

$$\int_1^\infty \frac{1}{f(x)}dx = +\infty.$$

Άσκηση 15

Έστω $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Δείξτε ότι

$$\sum_{k,j=1}^{n} \frac{\alpha_k \alpha_j}{\alpha_k^2 + \alpha_j^2} \geqslant 0.$$

Άσκηση 15

Έστω $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Δείξτε ότι

$$\sum_{k,j=1}^{n} \frac{\alpha_k \alpha_j}{\alpha_k^2 + \alpha_j^2} \geqslant 0.$$

Για κάθε $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\sum_{k,j=1}^{n} \frac{x_k x_j}{\alpha_k^2 + \alpha_j^2} = \sum_{k,j=1}^{n} x_k x_j \int_0^1 t^{\alpha_k^2 + \alpha_j^2 - 1} dt = \int_0^1 \left(\sum_{k,j=1}^{n} t^{\alpha_k^2 - 1/2} x_k t^{\alpha_j^2 - 1/2} x_j \right) dt.$$

Άσκηση 15

Έστω $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Δείξτε ότι

$$\sum_{k,j=1}^{n} \frac{\alpha_k \alpha_j}{\alpha_k^2 + \alpha_j^2} \geqslant 0.$$

Για κάθε $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\sum_{k,j=1}^{n} \frac{x_k x_j}{\alpha_k^2 + \alpha_j^2} = \sum_{k,j=1}^{n} x_k x_j \int_0^1 t^{\alpha_k^2 + \alpha_j^2 - 1} dt = \int_0^1 \left(\sum_{k,j=1}^{n} t^{\alpha_k^2 - 1/2} x_k t^{\alpha_j^2 - 1/2} x_j \right) dt.$$

Όμως,

$$\sum_{k,j=1}^{n} t^{\alpha_k^2 - 1/2} x_k t^{\alpha_j^2 - 1/2} x_j = \left(\sum_{k=1}^{n} t^{\alpha_k^2 - 1/2} x_k \right)^2 \geqslant 0$$

για κάθε $t \in [0, 1]$.

Άσκηση 15

Έστω $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Δείξτε ότι

$$\sum_{k,j=1}^{n} \frac{\alpha_k \alpha_j}{\alpha_k^2 + \alpha_j^2} \geqslant 0.$$

Για κάθε $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\sum_{k,j=1}^{n} \frac{x_k x_j}{\alpha_k^2 + \alpha_j^2} = \sum_{k,j=1}^{n} x_k x_j \int_0^1 t^{\alpha_k^2+\alpha_j^2-1} dt = \int_0^1 \left(\sum_{k,j=1}^{n} t^{\alpha_k^2-1/2} x_k t^{\alpha_j^2-1/2} x_j \right) dt.$$

Όμως,

$$\sum_{k,j=1}^{n} t^{\alpha_k^2-1/2} x_k t^{\alpha_j^2-1/2} x_j = \left(\sum_{k=1}^{n} t^{\alpha_k^2-1/2} x_k \right)^2 \geqslant 0$$

για κάθε $t \in [0,1]$.
Επιστρέφοντας στο ολοκλήρωμα βλέπουμε ότι

$$\sum_{k,j=1}^{n} \frac{x_k x_j}{\alpha_k^2 + \alpha_j^2} \geqslant 0.$$

Άσκηση 15

Έστω $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Δείξτε ότι

$$\sum_{k,j=1}^{n} \frac{\alpha_k \alpha_j}{\alpha_k^2 + \alpha_j^2} \geqslant 0.$$

Για κάθε $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\sum_{k,j=1}^{n} \frac{x_k x_j}{\alpha_k^2 + \alpha_j^2} = \sum_{k,j=1}^{n} x_k x_j \int_0^1 t^{\alpha_k^2 + \alpha_j^2 - 1} dt = \int_0^1 \left(\sum_{k,j=1}^{n} t^{\alpha_k^2 - 1/2} x_k t^{\alpha_j^2 - 1/2} x_j \right) dt.$$

Όμως,

$$\sum_{k,j=1}^{n} t^{\alpha_k^2 - 1/2} x_k t^{\alpha_j^2 - 1/2} x_j = \left(\sum_{k=1}^{n} t^{\alpha_k^2 - 1/2} x_k \right)^2 \geqslant 0$$

για κάθε $t \in [0, 1]$.
Επιστρέφοντας στο ολοκλήρωμα βλέπουμε ότι

$$\sum_{k,j=1}^{n} \frac{x_k x_j}{\alpha_k^2 + \alpha_j^2} \geqslant 0.$$

Το ζητούμενο είναι ειδική περίπτωση: παίρνουμε $x_k = \alpha_k$, $k = 1, \ldots, n$.

Άσκηση 16

Έστω $\phi(x) = d(x, \mathbb{Z})$, η απόσταση του x από τον πλησιέστερο ακέραιο. Να υπολογιστεί το

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{\phi^2(2^k x)}{2^k}.$$

Η $\Phi(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{\phi^2(2^k x)}{2^k}$ σειρά συνεχών συναρτήσεων που συγκλίνει ομοιόμορφα σε ολόκληρο το $\mathbb{R}$ από το κριτήριο του Weierstrass.

Άσκηση 16

Έστω $\phi(x) = d(x, \mathbb{Z})$, η απόσταση του x από τον πλησιέστερο ακέραιο. Να υπολογιστεί το

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{\phi^2(2^k x)}{2^k}.$$

Η $\Phi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{\phi^2(2^k x)}{2^k}$ σειρά συνεχών συναρτήσεων που συγκλίνει ομοιόμορφα σε ολόκληρο το $\mathbb{R}$ από το κριτήριο του Weierstrass.
Προσπαθούμε αρχικά να την υπολογίσουμε στους ρητούς $x = \frac{m}{2^n}$ με $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$ (που σχηματίζουν πυκνό υποσύνολο του $\mathbb{R}$).

Άσκηση 16

Έστω $\phi(x) = d(x, \mathbb{Z})$, η απόσταση του x από τον πλησιέστερο ακέραιο. Να υπολογιστεί το

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{\phi^2(2^k x)}{2^k}.$$

Η $\Phi(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{\phi^2(2^k x)}{2^k}$ σειρά συνεχών συναρτήσεων που συγκλίνει ομοιόμορφα σε ολόκληρο το $\mathbb{R}$ από το κριτήριο του Weierstrass.

Προσπαθούμε αρχικά να την υπολογίσουμε στους ρητούς $x = \frac{m}{2^n}$ με $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$ (που σχηματίζουν πυκνό υποσύνολο του $\mathbb{R}$).

Η Φ είναι άρτια, συνεπώς μπορούμε να υποθέσουμε ότι και ο m είναι φυσικός. Έχουμε

$$\Phi(m/2^n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\phi^2(2^{k-n}m)}{2^k} = \frac{1}{2^n} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\phi^2(2^{k-n}m)}{2^{k-n}}$$

$$= \frac{1}{2^n} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \frac{\phi^2(2^s m)}{2^s} = \frac{1}{2^n}\Phi(m).$$

Θεωρούμε τον φυσικό m. Αν r είναι ο μικρότερος φυσικός για τον οποίο $m < 2^r$, τότε

$$\Phi(m) = \sum_{k=1}^{r} 2^k \phi^2(2^{-k} m) + \sum_{k=r+1}^{\infty} \frac{m^2}{2^k} = \sum_{k=1}^{r} 2^k \phi^2(2^{-k} m) + \frac{m^2}{2^r}.$$

Θεωρούμε τον φυσικό m. Αν r είναι ο μικρότερος φυσικός για τον οποίο $m < 2^r$, τότε

$$\Phi(m) = \sum_{k=1}^{r} 2^k \phi^2(2^{-k} m) + \sum_{k=r+1}^{\infty} \frac{m^2}{2^k} = \sum_{k=1}^{r} 2^k \phi^2(2^{-k} m) + \frac{m^2}{2^r}.$$

Με επαγωγή δείχνουμε ότι

$$\sum_{k=1}^{r} 2^k \phi^2(2^{-k} m) = m - \frac{m^2}{2^r}$$

οπότε $\Phi(m) = m$.

Θεωρούμε τον φυσικό m. Αν r είναι ο μικρότερος φυσικός για τον οποίο $m < 2^r$, τότε

$$\Phi(m) = \sum_{k=1}^{r} 2^k \phi^2(2^{-k}m) + \sum_{k=r+1}^{\infty} \frac{m^2}{2^k} = \sum_{k=1}^{r} 2^k \phi^2(2^{-k}m) + \frac{m^2}{2^r}.$$

Με επαγωγή δείχνουμε ότι

$$\sum_{k=1}^{r} 2^k \phi^2(2^{-k}m) = m - \frac{m^2}{2^r}$$

οπότε $\Phi(m) = m$.
Επαγωγικό βήμα: υποθέτουμε ότι έχουμε την ισότητα για $m < 2^r$ και παίρνουμε $m = 2^r + s$ με $0 \leqslant s < 2^r$. Τότε

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{r+1} 2^k \phi^2(2^{-k}m) &= \sum_{k=1}^{r} 2^k \phi^2(2^{-k}s) + 2^{r+1}\phi^2(1/2 + s/2^{r+1}) \\ &= s - \frac{s^2}{2^r} + 2^{r+1}(1/2 - s/2^{r+1})^2 = s - \frac{s^2}{2^r} + 2^{r-1} - s + \frac{s^2}{2^{r+1}} \\ &= 2^{r-1} - \frac{s^2}{2^{r+1}} = 2^{r-1} - \frac{(m-2^r)^2}{2^{r+1}} = 2^{r-1} - \frac{m^2}{2^{r+1}} + m - 2^{r-1} \\ &= m - \frac{m^2}{2^{r+1}}.\end{aligned}$$

Θεωρούμε τον φυσικό m. Αν r είναι ο μικρότερος φυσικός για τον οποίο $m < 2^r$, τότε

$$\Phi(m) = \sum_{k=1}^{r} 2^k \phi^2(2^{-k}m) + \sum_{k=r+1}^{\infty} \frac{m^2}{2^k} = \sum_{k=1}^{r} 2^k \phi^2(2^{-k}m) + \frac{m^2}{2^r}.$$

Με επαγωγή δείχνουμε ότι

$$\sum_{k=1}^{r} 2^k \phi^2(2^{-k}m) = m - \frac{m^2}{2^r}$$

οπότε $\Phi(m) = m$.
Επαγωγικό βήμα: υποθέτουμε ότι έχουμε την ισότητα για $m < 2^r$ και παίρνουμε $m = 2^r + s$ με $0 \leqslant s < 2^r$. Τότε

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{r+1} 2^k \phi^2(2^{-k}m) &= \sum_{k=1}^{r} 2^k \phi^2(2^{-k}s) + 2^{r+1}\phi^2(1/2 + s/2^{r+1}) \\ &= s - \frac{s^2}{2^r} + 2^{r+1}(1/2 - s/2^{r+1})^2 = s - \frac{s^2}{2^r} + 2^{r-1} - s + \frac{s^2}{2^{r+1}} \\ &= 2^{r-1} - \frac{s^2}{2^{r+1}} = 2^{r-1} - \frac{(m-2^r)^2}{2^{r+1}} = 2^{r-1} - \frac{m^2}{2^{r+1}} + m - 2^{r-1} \\ &= m - \frac{m^2}{2^{r+1}}.\end{aligned}$$

Τελικά $\Phi(m/2^n) = m/2^n$ και λόγω συνέχειας, $\Phi(x) = x$ για $x > 0$. Η Φ είναι άρτια, δηλαδή $\Phi(x) = |x|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.