1. Έστω

$$Q_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(t^2 + 2at + b)^n} dt$$

όπου $b > a^2$.
Να δειχθεί ότι ο αριθμός :

$$\frac{2^{2n} Q_{n+1} (b - a^2)^{n+\frac{1}{2}}}{\pi(n+1)}$$

είναι πάντα ακέραιος.

2. Έστω A και B διακεκριμένα σημεία στο μιγαδικό επίπεδο, το σημείο G_{AB} ορίζεται να είναι το βαρύκεντρο του τριγώνου ABK όπου το σημείο K είναι η εικόνα του B μέσω στροφής κάτα την φορά του ρολογιού γύρω από το A σε γώνια $\frac{\pi}{3}$.

Έστω τρίγωνο T_1 που έχει κορυφές A, B, C και T_2 τρίγωνο που έχει κορυφές G_{AB}, G_{BC}, G_{CA}. Να δειχθεί ότι το T_2 είναι πάντα ισόπλευρο.

Σημείωση: *Αν ένα τρίγωνο έχει κορυφές τα σημεία P, Q, R και αυτά αναπαριστώνται από του μιγαδικούς p, q, r αντίστοιχα τότε το βαρύκεντρο αναπαριστάται απο τον μιγαδικό $\frac{1}{3}(p + q + r)$.*

3. Έστω ακολουθία a_k που ορίζεται ως εξής :

$$a_1 = 1$$
$$a_{2k} = a_k$$
$$a_{2k+1} = a_k + a_{k+1}$$

Ορίζουμε $f(k) = \frac{a_k}{a_{k+1}}$, να δειχθει ότι η απεικόνιση f είναι επί του $\mathbb{Q}^+$ και ότι είναι αντιστρέψιμη.

4.Υπολογίστε την σειρά :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\binom{n+r}{r+1}}$$

Επίσης, αν θέλετε, αποδεικνύοντας τις ανισότητες :

$$\frac{3!}{n^3} < \frac{1}{\binom{n+1}{3}} \text{ και } \frac{20}{\binom{n+1}{3}} - \frac{1}{\binom{n+2}{5}} < \frac{5!}{n^3}$$

δείξτε ότι :

$$\frac{115}{96} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} < \frac{116}{96}$$

5.Βρείτε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοιες ώστε :

$$f(-x) + \int_0^x t f(t - x) dt = x$$

6. Βρείτε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \to [1, +\infty)$ για τις οποίες υπάρχει σταθερά $\beta \in \mathbb{R}$ και θετικός ακέραιος k τέτοιες ώστε :

$$f(x) f(2x) \dots f(nx) \leq \beta n^k$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$

7. Έστω μια συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοια ,ώστε :

$$2f(f(x)) = 3f(x) - x$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$
(i) Δείξτε ότι το σύνολο $\{x \in \mathbb{R} : f(x) = x\}$ είναι μη κενό διάστημα.
(ii) Βρείτε την f.

8. Έστω η ακολουθία :

$$I_n = \int_0^{\infty} \frac{\arctan(x)}{(1 + x^2)^n} dx$$

Δείξτε ότι :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{I_n}{n} = \frac{\pi^2}{6} \qquad \int_1^{\infty} \arctan(x) \log\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) dx = \frac{\pi^2}{6}$$

9. Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη και ολοκληρώσιμη με

$$\int_a^b f^2 dx = \int_a^b f^3 dx = \int_a^b f^4 dx$$

Δείξτε ότι $f = \chi_A$ για κάποιο κατάλληλο A.

10. Έστω $\phi(x) = d(x, \mathbb{Z})$, η απόσταση του x από τον πλησιέστερο ακέραιο. Να υπολογιστεί το :

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{\phi^2(2^k x)}{2^k}$$

11. Έστω $n \in \mathbb{N}$, ορίζουμε $M(n)$ να είναι ο μεγαλύτερος ακέραιος m τέτοιος ώστε :

$$\binom{m}{n-1} > \binom{m-1}{n}$$

Υπολογίστε το όριο :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{M(n)}{n}$$

12. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνάρτηση τέτοια ώστε :

$$f(x) + f\left(1 - \frac{1}{x}\right) = \arctan(x)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$, υπολογίστε το :

$$\int_0^1 f(x)dx$$

13. Να δειχθεί ότι :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \cos((n+2m+1)x)dx = (-1)^m \frac{2^n n!(2m)!(n+m)!}{m!(2n+2m+1)!}$$

14. Υπάρχει γνησίως αύξουσα συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f'(x) = f(f(x))$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$;

15. Έστω $f : \mathbb{R} \to [0,1]$ συνεχής, υπολογίστε το όριο :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)!}{(n!)^2} \int_0^1 x^n (1-x)^n f(x)dx$$

16. Θεωρώντας τα ολοκληρώματα :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2n}(x)\, dx$$

υπολογίστε το :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$$

17. Να γίνει η γραφική παράσταση της συνάρτησης :

$$g(x) = \arctan\left(\frac{x + \tan(\beta)}{1 - x\tan(\beta)}\right) - \arctan\left(\frac{x + \tan(\alpha)}{1 - x\tan(\alpha)}\right)$$

όπου $\beta < 0 < \alpha$.

18. Έστω C_1 καμπύλη με παραμετρικές εξισώσεις :

$$x = ct \qquad y = \frac{c}{t}$$

όπου $c > 0$ και $t \neq 0$ και C_2 ο κύκλος :

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

Οι C_1 και C_2 τέμνονται σε τέσσερα σημεία $P_i (i = 1,2,3,4)$. Να δειχθεί ότι :

$$|OP_1| + |OP_2| + |OP_3| + |OP_4| = 4r^2$$

19. Έστω το σύστημα εξισώσεων :

$$(\Sigma_1) : \begin{cases} ay^3 + bx^2 y + cx = 1 \\ 2bxy + c = 0 \\ 3ay^2 + bx^2 = 0 \end{cases}$$

$abc \neq 0$ και $b > 0$. Δείξτε, ότι αν το σύστηματα έχει λύση, τότε $4ac^6 + 27b^3 = 0$

20*. Χρησιμοποιώντας την συνάρτηση $\sinh(x)$ ή αλλιώς δείξτε ότι :

$$\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{2+\sqrt{2}}{2} \times \frac{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \times \dots$$

21. Βρείτε όλα τα διατεταγμένα ζευγάρια πραγματικών αριθμών (a, b), τέτοια ώστε η ευθεία $y = ax + b$ να τέμνει την καμπύλη $y = \log(1 + x^2)$ ακριβώς σε ένα σημείο.

22.Έστω $f : [a, b] \to [0, \infty)$ συνεχής και όχι μηδενική. Αποδείξτε ότι :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\int_a^b (f(x))^{n+1} dx}{\int_a^b (f(x))^n dx} = \sup\{f(x) : x \in [a, b]\}$$

23. Βρείτε τη συνάρτηση $h(x)$ τέτοια ώστε, για κάθε $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$:

$$h(x) + h\left(\frac{1}{1-x}\right) = 1 - x - \frac{1}{1-x}$$

24. Υπολογίστε το άθροισμα :

$$\sum_{r=-\infty}^{+\infty} \operatorname{sech}(ry)\operatorname{sech}((r+1)y)$$

όπου $\operatorname{sech}(x) = 1/\cosh(x) = 2/(e^x + e^{-x})$

25. Έστω $X_0, X_1, \dots, X_{n-1}$ τα σημεία του μιγαδικού επιπέδου που αναπαριστούν τις λύσεις της εξίσωσης $z^n = 1$ (n-οστες ρίζες της μονάδας). Να δειχθεί ότι :

$$|X_0X_1| \times |X_0X_2| \times \cdots \times |X_0X_{n-1}| = n$$

26. Οι τέσσερις κορυφές $P_i (i = 1, 2, 3, 4)$ ενός κανονικού τετραέδρου (*όλες οι πλευρές του είναι ισόπλευρα τρίγωνα.*) βρίσκονται στην επιφάνεια της σφαίρας ακτίνας 1 και κέντρου την αρχή των αξόνων. Έστω επίσης X το αγαπημένο σας σημείο πάνω στην σφαίρα. Να δειχθεί ότι η τιμή του αθρίσματος :

$$|XP_1|^4 + |XP_2|^4 + |XP_3|^4 + |XP_4|^4$$

είναι ανεξάρτητη από την επιλογή του X.

27. Έστω $a_0 = \pi/2$ και $a_n = \sin(a_{n-1}), n \geq 1$ αποφανθείτε αν το άθροισμα :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2$$

συγκλίνει.

28. Έστω η κλάση των συναρτήσεων που *φθίνουν πολυ γρήγορα* :

$$\mathscr{A}(\mathbb{R}) = \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} : f \text{ συνεχής και } \exists \varepsilon > 0,\ A > 0 \text{ ώστε } |f(x)| \leq \frac{A}{1 + |x|^{1+\varepsilon}}\ \forall x \in \mathbb{R} \right\}$$

Για $f \in \mathscr{A}(\mathbb{R})$ υπολογίστε τα όρια :

$$\lim_{t\to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+t) - f(x)|\, dx\,, \quad \lim_{t\to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+t) + f(x)|\, dx$$

29. Μια ακολουθία $(K_n)_{n\geq 1}$ 2π-περιοδικών συναρτήσεων λέγονται *καλοί πυρήνες* αν ικανοποιούν τα εξής :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(x)dx = 1\ , \quad \int_{-\pi}^{\pi} |K_n(x)|dx \leq M\ , \quad \lim_{n\to\infty}\int_{\delta\leq|x|\leq\pi} |K_n(x)|dx = 0$$

για κάποια σταθερά $M > 0$ και για κάθε $\delta > 0$.
Αν $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-περιοδική συνάρτηση, να δειχθεί ότι :

$$\lim_{n\to\infty}(f * K_n(x_0)) = f(x_0)$$

σε κάθε σημείο συνέχειας x_0 της f, όπου $f * K_n(x)$ η συνέλιξη.

30. Έστω $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ μια πυκνή ακολουθία του $[0, 1]$. Έστω $f(x) = \sin(1/x)$ για $x \neq 0$ και $f(0) = 0$. Ορίζουμε :

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}f(x - a_n)$$

Δείξτε ότι η F είναι ολοκληρώσιμη, ασυνεχής σε κάθε a_n και δεν είναι μονότονη σε κανένα υποδιάστημα του $[0, 1]$. Αυτό είναι ένα παράδειγμα Riemannn ολοκληρώσιμης συνάρτησης με πυκνό σύνολο σημείων ασυνέχειας.

31.Θεωρώντας τα ολοκληρώματα :

$$\int_0^1 x^{n-1}\log^2 x dx$$

υπολογίστε το όριο :

$$\lim_{n\to\infty} n^2\left(\frac{1}{n^3} + \frac{1}{(n+k)^3} + \frac{1}{(n+2k)^3} + \dots\right)$$

όπου k ένας πραγματικός θετικός αριθμός.

32. Έστω $f : [0, 2018] \to \mathbb{R}$ συνεχής, τέτοια ώστε $\int_0^{2018} f(x)dx = 0$. Έστω, επίσης, F_1, F_2 δύο παράγουσες της f και ισχύει ότι :

$$\frac{1009}{\pi^2}\int_0^{2018}(f(x))^2 \leq \max\left\{\left(\int_0^{2018}\cos(\pi x)F_1(x)dx\right)^2, \left(\int_0^{2018}\sin(\pi x)F_2(x)dx\right)^2\right\}$$

Να δειχθεί ότι $f(x) = f(x + 2)$ για κάθε $x \in [0, 2016]$.

33. Βρείτε όλες τις διαφορίσιμες συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που ικανοποιούν :

$$xf'(x) + kf(-x) = x^2 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

όπου $k \geq 1$ ακέραιος.

34.* Έστω $(X_i)_{i\geq 1}$ ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών με $X_1 \sim \text{Bernoulli}(p)$. Έστω επίσης $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ συνεχής.

(α) Δείξτε ότι το

$$B_n(p) = \mathbf{E}\left\{f\left(\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}\right)\right\}$$

είναι πολυώνυμο για κάθε φυσικό n

(β) Δείξτε ότι :

$$\sup_{p\in[0,1]}|f(p) - B_n(p)| \longrightarrow 0$$

καθώς το $n \to \infty$