ΘΕΜΑΤΑ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ

IMC 2014

Α. Συμμετρικοί, ερμιτιανοί και θετικά ορισμένοι πίνακες

1. Αποδείξτε ότι κάθε ερμιτιανός πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ με $\operatorname{rank}(A) = r$ μπορεί να γραφεί σαν άθροισμα r το πλήθος πινάκων τάξης 1.

2. Αποδείξτε ότι αν ο $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ είναι ένας μη-μηδενικός ερμιτιανός πίνακας, τότε

$$\operatorname{rank}(A) \geq \frac{(\operatorname{tr}A)^2}{\operatorname{tr}(A^2)}.$$

3. Αποδείξτε ότι αν ο πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ είναι θετικά ορισμένος, τότε το ίδιο ισχύει και για τον $\operatorname{adj}A$. [*Υπόδειξη:* Ποιές είναι οι ιδιοτιμές του $\operatorname{adj}A$;]

4. Έστω $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ένας θετικά ορισμένος πίνακας. Αποδείξτε ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\langle Ax,x\rangle} dx = \frac{(\sqrt{\pi})^n}{\sqrt{\det(A)}}.$$

5. Έστω $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ένας θετικά ημιορισμένος πίνακας με $a_{ii} = 0$ για κάποιο δείκτη i. Αποδείξτε ότι ισχύει $a_{ij} = a_{ji} = 0$ για κάθε δείκτη j.

6. Έστω $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ δύο θετικά ορισμένοι πίνακες.
(α′) Να δείξετε ότι $\det(A + I) \geq \det(A) + 1$.
(β′) Να δείξετε ότι $\det(A + B) \geq \det(A) + \det(B)$.

7. Έστω $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ θετικά ορισμένοι πίνακες με $A > B > 0$. Να δείξετε ότι $A^{-1} < B^{-1}$.

8. Αποδείξτε ότι για κάθε θετικά ορισμένο πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ισχύει

$$A + A^{-1} \geq 2I.$$

9. (Αρχή min-max) Έστω $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ένας ερμιτιανός πίνακας με ιδιοτιμές $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq ... \geq \lambda_n$. Να δείξετε ότι

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \max_{|x|=1} \langle Ax, x\rangle \\
\lambda_2 &= \min_{y_1} \max_{\substack{x \perp y_1 \\ |x|=1}} \langle Ax, x\rangle \\
\vdots &= \vdots \\
\lambda_n &= \min_{y_1,y_2,\ldots,y_{n-1}} \max_{\substack{x \perp y_1,y_2,\ldots,y_{n-1} \\ |x|=1}} \langle Ax, x\rangle.
\end{aligned}$$

Β. Αντισυμμετρικοί πίνακες

10. Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ένας αντισυμμετρικός πίνακας. Αποδείξτε ότι ο $I + A$ είναι αντιστρέψιμος.

11. Έστω $A, B \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$ δύο αντισυμμετρικοί πίνακες. Αποδείξτε ότι όλες οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου $\chi_{AB}(x)$ του AB εμφανίζονται με πολλαπλότητα μεγαλύτερη από 1.

Γ. Ορθογώνιοι, κανονικοί και μηδενοδύναμοι πίνακες

12. Έστω $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ ένας ορθογώνιος πίνακας με $\det(A) = 1$. Αποδείξτε ότι

$$(\mathrm{tr}A)^2 - \mathrm{tr}(A^2) = 2\mathrm{tr}(A) \quad \text{και} \quad \left(\sum_i a_{ii} - 1\right)^2 + \sum_{i<j}(a_{ij} - a_{ji})^2 = 4.$$

[*Υπόδειξη:* Τι μορφή έχει ένας 3×3 ορθογώνιος πίνακας ορίζουσας 1;]

13. Αποδείξτε ότι για έναν κανονικό πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ισχύει $\ker A^* = (\mathrm{im}A)^\perp$ και $\mathrm{im}A^* = (\ker A)^\perp$.

14. Έστω $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ δύο κανονικοί πίνακες με $\mathrm{im}A \perp \mathrm{im}B$. Να αποδείξετε ότι ο $A + B$ είναι κανονικός.

15. Αποδείξτε ότι ένας πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ είναι μηδενοδύναμος αν και μόνο αν $\mathrm{tr}(A^k) = 0$ για κάθε $k = 1, 2, ..., n$.

16. Έστω $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Αποδείξτε ότι αν ο πίνακας $A + xB$ είναι μηδενοδύναμος για $n + 1$ διαφορετικές τιμές του x, τότε οι A και B είναι επίσης μηδενοδύναμοι.

17. Έστω $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ένας μοναδιαίος πίνακας και ένα διάνυσμα $x \neq 0$ ώστε $Ux \perp x$. Να αποδείξετε ότι κάθε τόξο της μοναδιαίας περιφέρειας που περιέχει όλες τις ιδιοτιμές του U έχει μήκος μεγαλύτερο ή ίσο του π.

Δ. Συμπλήρωμα Schur και γινόμενο Hadamard

18. Έστω A, B, C, D $n \times n$ πίνακες με $\det A \neq 0$ και $AC = CA$. Αποδείξτε ότι

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \det(AD - CB).$$

19. Αποδείξτε ότι το ζητούμενο της προηγούμενης άσκησης αληθεύει, ακόμη κι αν $\det A = 0$.

20. Έστω $A = \begin{pmatrix} A_1 & B \\ B^* & A_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{(\kappa+\lambda)\times(\kappa+\lambda)}$ ένας θετικά ορισμένος πίνακας, όπου $A_1 \in \mathbb{C}^{\kappa\times\kappa}$ και $B \in \mathbb{C}^{\lambda\times\lambda}$. Να δείξετε ότι

$$\det(A) \leq \det(A_1)\det(A_2).$$

21. Αποδείξτε ότι αν $A > 0$ και $B \geq 0$, τότε $\mathrm{rank}(A \circ B) \geq \mathrm{rank}(B)$.
[*Υπόδειξη:* Μπορεί να σας χρησιμεύσει το θεώρημα του Schur.]

Ε. Διπλά στοχαστικοί πίνακες

22. Αποδείξτε ότι το γινόμενο δύο διπλά στοχαστικών πινάκων είναι διπλά στοχαστικός πίνακας.

23. Έστω $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ένας μοναδιαίος πίνακας. Να δείξετε ότι ο πίνακας $B = \left(|a_{ij}|^2\right)$ είναι διπλά στοχαστικός.

24. Έστω $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ οι ιδιοτιμές ενός ερμιτιανού πίνακα A. Να δείξετε ότι το σημείο με συντεταγμένες $(a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn})$ ανήκει στην κυρτή θύκη του συνόλου

$$\Lambda = \left\{ \left(\lambda_{\sigma(1)}, \lambda_{\sigma(2)}, ..., \lambda_{\sigma(n)}\right) : \ \sigma \in \mathcal{S}_n \right\}.$$