ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΠΡΟΕΤΟΙΜΑΣΙΑΣ

SEEMOUS 2014

1. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια συνεχής, $1-$περιοδική συνάρτηση, δηλαδή με

$$f(x+1) = f(x), \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Αποδείξτε ότι υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ με

$$f(x_0 + \pi) = f(x_0).$$

2. Έστω μια συνεχής συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ με $f(0) = 0$ για την οποία ισχύει

$$0 \leq f'(x) \leq 2f(x), \quad \text{για κάθε } x \in (0,1).$$

Να αποδείξετε ότι $f \equiv 0$.

3. Έστω $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση για την οποία το όριο

$$\lim_{x\to\infty} \left(f(x) + \int_0^x f(t)dt \right)$$

υπάρχει στο $\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0.$$

4. Για $n \in \mathbb{N}$ υπολογίστε το ολοκλήρωμα:

$$I_n = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(nx)}{(1+2^x)\sin x} dx.$$

5. Έστω S το σύνολο όλων των συναρτήσεων $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ κλάσης C^1 με $f(0) = 0$ για τις οποίες ισχύει

$$\int_0^1 f'(x)^2 dx \leq 1.$$

Για συνάρτηση $f \in S$ θεωρούμε την ποσότητα

$$J(f) = \int_0^1 f(x) dx.$$

Αποδείξτε ότι η συνάρτηση J είναι φραγμένη στο S και υπολογίστε το supremum της. Υπάρχει συνάρτηση $f_0 \in S$ η οποία επιτυγχάνει αυτό το supremum; Αν ναι, να βρείτε μια τέτοια.

6. Έστω $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f(x) = 0$ για $x > 10^{10}$. Να αποδείξετε ότι

$$\int_0^\infty (f(x))^2 \, dx \leq 2\sqrt{\int_0^\infty x^2 (f(x))^2 \, dx}\sqrt{\int_0^\infty (f'(x))^2 \, dx}.$$

7. Έστω $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση. Έστω A το σύνολο των πραγματικών α για τους οποίους υπάρχει μια ακολουθία (x_n) με $x_n \to \infty$ ώστε

$$a = \lim_{n\to\infty} f(x_n).$$

Να δείξετε ότι αν $a, b \in A$, τότε $[a, b] \subseteq A$.

8. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση κλάσης C^2, δηλαδή η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και η f'' είναι συνεχής. Επιπλέον υποθέτουμε ότι οι f και f'' είναι φραγμένες. Θέτουμε

$$M_k = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| f^{(k)}(x) \right|, \quad \text{για } k = 0, 1, 2.$$

Να αποδείξετε ότι

$$M_1 \le 2\sqrt{M_0 M_2}.$$

9. Έστω $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση κλάσης C^3. Αποδείξτε ότι η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \big(n\,(f(1/n) - f(-1/n)) - 2f'(0) \big)$$

συγκλίνει.

10. Έστω (a_n) μια ακολουθία θετικών αριθμών για την οποία ισχύει

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty.$$

Αποδείξτε ότι υπάρχει ακολουθία (c_n) θετικών αριθμών με

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \infty \quad \text{και} \quad \sum_{n=1}^{\infty} c_n a_n < \infty.$$

11. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση με

$$|f(x)| \le \frac{C}{x^2+1}, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R},$$

όπου C μια θετική σταθερά. Θεωρούμε τη συνάρτηση $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$F(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x+n), \ x \in \mathbb{R}.$$

(i) Αποδείξτε ότι η F είναι συνεχής και 1−περιοδική.

(ii) Αποδείξτε ότι για κάθε συνεχή, 1−περιοδική συνάρτηση G ισχύει

$$\int_0^1 F(x)G(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)G(x)dx.$$

12. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση ορισμένη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$f(x) = f(x+1) = f(x+\sqrt{2}), \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να δείξετε ότι η f είναι σταθερή.

13. Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k^2+n^2}.$$

14. Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)\cdot\sin\left(\frac{2}{n}\right)\cdots\sin\left(\frac{n}{n}\right)\right)^{1/n}.$$

15. Έστω $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχείς και $1-$περιοδικές συναρτήσεις. Να δείξετε ότι

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f(x)g(nx)dx = \int_0^1 f(x)dx\int_0^1 g(x)dx.$$

16. Να βρεθούν όλες οι συνεχείς συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \to [1, +\infty)$ για τις οποίες υπάρχουν σταθερές $a \in \mathbb{R}$ και $k \in \mathbb{N}$ ώστε

$$f(x)\cdot f(2x)\cdots f(nx) \leq an^k,$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}_{>0}$ και $x \in \mathbb{R}$.

Τα παραπάνω προβλήματα είναι από τα βιβλία:

- Berkeley Problems in Mathematics, Paulo Ney de Souza, Jorge-Nuno Silva,
- Putnam and Beyond, Titu Andreescu, Razvan Gelca.

Ε.Μ.Ε., 23 Φεβρουαρίου 2014