Γραμμική Άλγεβρα
Προετοιμασία Seemous-IMC 2019

Παναγιώτης Μισιακός - pmisiakos@hotmail.com

November 27, 2018

Εισαγωγή

Η γραμμική άλγεβρα αποτελεί κλάδο των μαθηματικών με μεγάλη επιρροή και σημασία τόσο για υπόλοιπους κλάδους των μαθηματικών όσο και για την ανάπτυξη μαθηματικών θεωριών σε επιστημονικούς κλάδους όπως η φυσική και η θεωρητική πληροφορική.

Ένα πολύ σπουδαίο κίνητρο για την μελέτη γραμμικής άλγεβρας αποτελούν οι μαθηματικοί διαγωνισμοί για φοιτητές. Σε τέτοιους διαγωνισμούς συναντώνται προβλήματα τα οποία για την επίλυση τους χρειάζονται θεωρία από τις ευρύτερες περιοχές της γραμμικής Άλγεβρας και της Βασικής Άλγεβρας. Συνήθως, ωστόσο, τα προβλήματα περιορίζονται στις έννοιες της θεωρίας πινάκων. Σε κάθε περίπτωση τέτοια προβλήματα απαιτούν ευφυή τεχνάσματα για την επίλυση τους.

Τέτοια τεχνάσματα θα προσπαθήσουμε να δούμε στο συγκεκριμένο σύγγραμμα, παραθέτοντας, αρχικά, συνοπτική θεωρία που είναι απαραίτητη για την κατανόηση των εννοιών και, έπειτα, εφαρμογή αυτών σε ασκήσεις από διαγωνισμούς. Για περαιτέρω μελέτη της θεωρίας και επίλυση περισσοτέρων ασκήσεων, ο αναγνώστης καλείται να αναφερθεί σε βιβλία που παρατίθενται στην βιβλιογραφία, τόσο αυτού του συγγράματος, όσο και σε αυτήν της e-class.

Διανυσματικοί Χώροι

Ένα σύνολο V ονομάζεται διανυσματικός χώρος πάνω στο σώμα F, αν για κάθε $v, u, w \in V$ και $\lambda, \gamma \in F$, υπάρχουν $0 \in V$ και $1 \in F$ ώστε να πληρούνται οι παρακάτω ιδιότητες που αφορούν τις πράξεις πρόσθεσης στοιχείων του V και βαθμωτού πολλαπλασιασμού στοιχείων του F με αυτά του V:

- $v + u \in V$
- $\lambda u \in V$
- $v + u = u + v$ (Αντιμεταθετική ιδιότητα πρόσθεσης)
- $(v + u) + w = v + (u + w)$ (Προσεταιριστική ιδιότητα της πρόσθεσης)
- $v + 0 = v$ (Ύπαρξη ουδετέρου στοιχείου πρόσθεσης)
- $\forall v \in V, \exists(-v) \in V : v + (-v) = 0$ (Ύπαρξη προσθετικού αντιστρόφου)
- $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$ (Επιμερισμός του βαθμωτού πολλαπλασιασμού ως προς την πρόσθεση του V)
- $(\lambda + \gamma)u = \lambda u + \gamma u$ (Επιμερισμός του βαθμωτού πολλαπλασιασμού ως προς την πρόσθεση του K)
- $1u = u$ (Ουδέτερο στοιχείο βαθμωτού πολλαπλασιασμού)
- $(\lambda\gamma)u = \lambda(\gamma u)$

Το σώμα F συνήθως είναι το σύνολο των πραγματικών $\mathbb{R}$ ή των μιγαδικών $\mathbb{C}$. Τα στοιχεία $v \in V$ ονομάζονται διανύσματα του χώρου V. Αξίζει να σημειωθεί ότι το κενό σύνολο αποτελεί τον μηδενικό διανυσματικό χώρο.

Στο σημείο αυτό είμαστε σε θέση να ορίσουμε την έννοια του "υποσυνόλου" ενός διανυσματικού χώρου. Συγκεκριμένα, ένα σύνολο $U \subseteq V$ ονομάζεται <u>υπόχωρος</u> του V, αν για κάθε $u, v \in U \Rightarrow u + v \in U$ και $\forall \lambda \in F : \lambda u \in U$.

Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα υποχώρου αποτελεί η γραμμική θήκη k διανυσμάτων. Πράγματι αν ορίσουμε $S = v_1, ..., v_k$ ένα σύνολο διανυσμάτων του χώρου V, τότε ο χώρος $span(S) = \{\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_k v_k | \lambda_i \in F, i = 1, ..., k\}$ αποτελεί υπόχωρο του V. Αυτό αποδεικνύεται εύκολα με τις ιδιότητες και τους ορισμούς που έχουμε αναφέρει. Για $v, u \in span(S)$ έχουμε $v = \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_k v_k$ και $u = \gamma_1 v_1 + ... + \gamma_k v_k$, οπότε $u + v = (\lambda_1 + \gamma_1)v_1 + ... + (\lambda_k + \gamma_k)v_k \in span(S)$ και $\lambda v = (\lambda\lambda_1)v_1 + ... + (\lambda\lambda_k)v_k$.

Παρατηρούμε ότι οι γραμμικοί συνδυασμοί των διανυσμάτων $v_1, ..., v_k$ παράγουν τον χώρο $span(S)$. Τα $v_1, ..., v_k$ σε αυτήν την περίπτωση λέγονται γεννήτορες του $span(S)$. Γενικά, λέμε ότι ένας γραμμικός χώρος *παράγεται* από ένα σύνολο γεννητόρων S όταν $span(S) = V$.

Πολύ σπουδαίος είναι ο παρακάτω ορισμός :

Τα διανύσματα $v_1, v_2, ..., v_n \in V$ ονομάζονται **γραμμικώς ανεξάρτητα** αν:

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_n v_n = 0 \Rightarrow \lambda_1 = ... = \lambda_n = 0$$

Όπου τα λ_i είναι στοιχεία του σώματος F.

Πλέον είμαστε σε θέση να ορίσουμε την **βάση** ενός διανυσματικού χώρου. Ας υποθέσουμε, λοιπόν, ότι έχουμε έναν διανυσματικό χώρο V πάνω στο σώμα F και ένα σύνολο γεννητόρων $S = v_1, ..., v_n$ αυτού. Αν τα $v_1, ..., v_n$ είναι *γραμμικώς ανεξάρτητα*, τότε λέμε ότι το σύνολο S αποτελεί *βάση* του διανυσματικού χώρου V.

Αναφέρουμε χωρίς απόδειξη ότι κάθε διανυσματικός χώρος έχει πεπερασμένη ή άπειρη βάση, και ο πληθάριθμος των στοιχείων της βάσης του ονομάζεται **διάσταση** του διανυσματικού χώρου. Στην περίπτωση του μηδενικού διανυσματικού χώρου ορίζουμε διάσταση ίση με 0.

Σημειώνουμε ωστόσο ότι για την απόδειξη του παραπάνω, χρήσιμο είναι το εξής λήμμα.

Λήμμα ανταλλαγής του Steinitz: Αν θεωρήσουμε ένα διανυσματικό χώρο V με $v_1, ..., v_k$ γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα και $u_1, ..., u_n$ σύνολο γεννητόρων του V, τότε:

- $k \leq n$
- $\exists \{w_{k+1}, ..., w_n\} \subseteq \{u_1, ..., u_n\}$ ώστε το $\{v_1, ..., v_k, w_{k+1}, ..., w_n\}$ να είναι σύνολο γεννητόρων του V (το $\{v_1, ..., v_k\}$ επεκτείνεται σε σύνολο γεννητόρων).

Χρησιμοποιώντας το λήμμα του Steinitz και με κάποιες επιπλέον διαδικασίες μπορούμε να συμπεράνουμε ότι κάθε σύνολο γραμμικώς ανεξάρτητων διανυσμάτων μπορεί να επεκταθεί σε μία βάση του διανυσματικού χώρου.

Έχοντας υπόψιν τους ορισμούς αυτούς, μπορούμε πλέον να αντιμετωπίσουμε το ακόλουθο πρόβλημα.

Πρόβλημα 6 IMC 2018 Για $k \in \mathbb{N}$ να βρείτε τον ελάχιστο θετικό ακέραιο n ο οποίος είναι τέτοιος ώστε να υπάρχουν μη μηδενικά $u_1, ..., u_k \in \mathbb{R}^n$ με u_i κάθετο στο u_j για κάθε $|i-j|>1$.

Λύση: Θα δείξουμε ότι $n = \lceil \frac{k}{2} \rceil$ είναι το βέλτιστο φράγμα για το n. Πράγματι αν επιλέξουμε τα πρώτα δύο διανύσματα ίσα με το e_1, τα επόμενα δύο ίσα με το e_2 κ.ο.κ (όπου e_i η κανονική βάση του $\mathbb{R}^{\lceil \frac{k}{2} \rceil}$ τότε παίρνουμε το ζητούμενο, αφού τα διανύσματα αυτά ανα δύο είναι κάθετα. Οπότε γίνεται να επιτύχουμε τον αριθμό αυτό.

Μένει να αποδείξουμε ότι σε κάθε περίπτωση $n \geq \lceil \frac{k}{2} \rceil$. Πράγματι αν θεωρήσουμε τα διανύσματα $u_1, u_3, ..., u_{k-k(\mod 2)}$ που είναι σε πλήθος $\lceil \frac{k}{2} \rceil$, τότε αποδεικνύεται ότι αυτά είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Ας θεωρήσουμε αντίθετα ότι αυτά είναι γραμμικώς εξαρτημένα, δηλαδή ότι υπάρχουν $\lambda_i \in \mathbb{R}$ όχι όλα μηδεν ώστε $\lambda_1 u_1, \lambda_3 u_3, ..., \lambda_{k-(k-1 \mod 2)} u_{k-(k-1 \mod 2)} = 0$. Τότε όμως για $\lambda_i \neq 0 \Rightarrow u_i = -\frac{1}{\lambda_i}(\lambda_1 u_1 + \lambda_3 u_3 + ... + \lambda_{k-(k-1 \mod 2)} u_{k-(k-1 \mod 2)})$, οπότε ${u_i}^T u_i = -\frac{1}{\lambda_i}(\lambda_1 {u_i}^T u_1 + \lambda_3 {u_i}^T u_3 + ... + \lambda_{k-(k-1 \mod 2)} {u_i}^T u_{k-(k-1 \mod 2)}) = 0$, δηλαδή $|u|^2 = 0$, άτοπο.

Πίνακες

Ένας πίνακας $A \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{F})$ είναι μία ορθογώνια διάταξη στοιχείων του σώματος $\mathbb{F}$, το οποίο στις περισσότερες εφαρμογές είναι οι πραγματικοί ή οι φανταστικοί αριθμοί. Σχηματικά γράφουμε

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

ή σε πιο συνοπτική μορφή $A = (a_{ij})$. n είναι το πλήθος των γραμμών και m το πλήθος των στηλών του πίνακα A. Ο $\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{F})$ αποτελεί διανυσματικό χώρο διάστασης nm πάνω στο σώμα F, αν ορίσουμε σαν πρόσθεση την πράξη $A + B = (a_{ij} + b_{ij})$ και βαθμωτό πολλαπλασιασμό τον $\lambda A = (\lambda a_{ij})$.

Το μέγιστο πλήθος γραμμικώς ανεξάρτητων γραμμών (ή στηλών) του A ονομάζεται τάξη του A και συμβολίζεται με $rank(A)$. Προφανώς, $rank(A) \leq min\{n, m\}$. Αποδεικνύεται ότι το $rank(A)$ είναι καλώς ορισμένο, δηλαδή πράγματι η διάσταση του χώρου που ορίζουν οι στήλες το πίνακα είναι ίση με αυτή που ορίζουν οι γραμμές του.

Μερικές χρήσιμες ποσότητες και συμβολισμοί του τετραγωνικού πίνακα $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ είναι οι εξής:

- $A^T = (a_{ji})$, ο ανάστροφος πίνακας του A.
- $\overline{A} = (\overline{a_{ij}})$ ο συζυγής του πίνακας A.
- $A^* = \overline{A^T}$
- $tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$, το ίχνος του A.
- $det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \left(sgn(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)} \right)$, η ορίζουσα του πίνακα n

Τα a_{ii}, αποτελούν την (κύρια) διαγώνιο του πίνακα A, επομένως το άθροισμα των διαγωνίων στοιχείων του πίνακα A αποτελεί το ίχνος του.
Ένας πίνακας ονομάζεται άνω (ή κάτω) τριγωνικός εάν τα στοιχεία κάτω (ή πάνω) από την κύρια διαγώνιο είναι όλα ίσα με μηδέν. Επιπλέον, διαγώνιος ονομάζεται ένας πίνακας που έχει μη μηδενικά στοιχεία μόνο στην διαγώνιο του. Ο σπουδαιότερος τέτοιος πίνακας είναι ο μοναδιαίος τετραγωνικός πίνακας

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Η ορίζουσα ενός πίνακα συνήθως υπολογίζεται αναδρομικά θεωρώντας ορίζουσες μικρότερης τάξης του πίνακα A. Μερικές από τις σπουδαιότερες ιδιότητες της είναι:

- Όταν αντιμεταθέτουμε δύο γραμμές του πίνακα αλλάζει μόνο το πρόσημο της ορίζουσας.
- Η ορίζουσα δεν αλλάζει αν προσθέσουμε το πολλαπλάσιο κάποιας γραμμής σε μία άλλη.
- Η ορίζουσα ενός άνω (ή κάτω) τριγωνικού πίνακα είναι το γινόμενο των διαγωνίων στοιχείων του.
- $det(A) = det(A^T)$

Ως γινόμενο των πινάκων $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C}), B \in \mathcal{M}_{m\times r}(\mathbb{C})$ ορίζουμε τον πίνακα $C \in \mathcal{M}_{n\times r}(\mathbb{C})$, όπου

$$C = (c_{ij}) = \left(\sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kj}\right)$$

Σημειώνουμε ότι για $K \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C}), A \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{C}), B, D \in \mathcal{M}_{m\times p}(\mathbb{C}), C \in \mathcal{M}_{p\times r}(\mathbb{C})$:

- $A(BC) = (AB)C$
- $A(B + D) = AB + AD$
- $(B + D)C = BC + DC$
- $KI_n = I_nK = K$

Επίσης, αποδεικνύεται ότι η ορίζουσα του γινομένου δύο πινάκων είναι το γινόμενο των οριζουσών τους. Δηλαδή, για δύο τετραγωνικούς πίνακες $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ θα ισχύει $det(AB) = det(A)det(B)$.
Ένας τετραγωνικός πίνακας A που πληρεί προϋποθέσεις που θα αναφέρουμε παρακάτω, έχει αντίστροφο πίνακα A^{-1}, ο οποίος είναι τέτοιος ώστε $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$. Ο αντίστροφος ενός πίνακα, όταν υπάρχει είναι μοναδικός, δηλαδή αν έχουμε $AB = I$ τότε $B = A^{-1}$. Ας δούμε μία εφαρμογή στις ορίζουσες και την εύρεση αντίστροφου ενός πίνακα.

Εφαρμογή: Πίνακας Vandermonde
Θεωρούμε τον πίνακα

$$V(x_1, ..., x_n) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

Ας προσπαθήσουμε να υπολογίσουμε την ορίζουσα του πίνακα $v(x_1, ..., x_n)$. Αυτή μπορεί να θεωρηθεί ως πολυώνυμο μεταβλητής x_1 βαθμού n. Παρατηρούμε ότι αν ήταν $x_1 = x_i$ τότε ο πίνακας έχει δύο ίδιες γραμμές, οπότε η ορίζουσα του μηδενίζεται. Οπότε $det(V(x_1, ..., x_n)) = \alpha(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)...(x_1 - x_n)$, όπου ο α είναι ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου του πολυωνύμου μας. Αν προσπαθήσουμε να υπολογίσουμε την ορίζουσα αναδρομικά, αναπτύσσοντας από την $n-$οστή γραμμή, θα διαπιστώσουμε ότι ο συντελεστής α είναι και αυτός ορίζουσα Vandermonde, μίας τάξης μικρότερης επί $(-1)^{n+1} = (-1)^{n-1}$. Οπότε, συμπεραίνουμε ότι $det(V(x_1, ..., x_n)) = (-1)^n det(V(x_2, ..., x_n)) \prod_{i=2}^{n}(x_1 - x_i)$ και τελικά προκύπτει ότι

$$det(V(x_1, ..., x_n)) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{1\le i<j\le n}(x_i - x_j) = \prod_{1\le i<j\le n}(x_j - x_i)$$

.

Επιπλέον μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι, εάν $\omega = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ είναι η $n-$οστή ρίζα της μονάδας τότε ο πίνακας $V = V(1, \omega, \omega^2, ..., \omega^{n-1})$ έχει ως αντίστροφο τον $\frac{1}{n}V^*$. Συγκεκριμένα:

$$VV^* = V\overline{V}^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \dots & \omega^{n-1} \\ 1 & \omega^2 & (\omega^2)^2 & \dots & (\omega^{n-1})^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega^{n-1} & (\omega^2)^{n-1} & \dots & (\omega^{n-1})^{n-1} \end{bmatrix} \overline{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \omega^1 & \omega^2 & \dots & \omega^n \\ 1 & \omega^2 & (\omega^2)^2 & \dots & (\omega^2)^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega^{n-1} & (\omega^{n-1})^2 & \dots & (\omega^{n-1})^{n-1} \end{bmatrix}} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \dots & \omega^{n-1} \\ 1 & \omega^2 & (\omega^2)^2 & \dots & (\omega^{n-1})^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega^{n-1} & (\omega^2)^{n-1} & \dots & (\omega^{n-1})^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \omega^{-1} & \omega^{-2} & \dots & \omega^{-n} \\ 1 & \omega^{-2} & (\omega^{-2})^2 & \dots & (\omega^{-2})^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega^{-(n-1)} & (\omega^{-(n-1)})^2 & \dots & (\omega^{-(n-1)})^{n-1} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} n & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & n & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n \end{bmatrix} = nI_n$$

αφού $\sum_{k=1}^{n} \omega^{lk}\omega^{-kj} = \sum_{k=1}^{n} \left(e^{\frac{2\pi i(l-j)}{n}}\right) = n\delta[l-j]$, δηλαδή είναι n αν και μόνον αν $l = j$ και 0 διαφορετικά.

Ένας τετραγωνικός πίνακας $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ καλείται αντιστρέψιμος αν ισχύει κάποια από τις παρακάτω ισοδύναμες συνθήκες, όπως αποδεικνύεται στο [4]:

- $rank(A) = n$
- Η εξίζωση $Ax = b$ έχει μοναδική λύση ως προς x για κάθε $b \in \mathbb{R}^n$
- $det(A) \neq 0$
- $\exists! B : AB = BA = I_n$

Ενδιαφέρον έχει να δούμε πώς μπορούμε να προσδιορίσουμε τον αντίστροφο πίνακα. Μάλιστα, αυτός υπολογίζεται κατευθείαν από την σχέση

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} adj(A)$$

όπου $adj(A) = ((-1)^{i+j} det(A_{ij}))^T$ και ο πίνακας A_{ij} προκύπτει αν διαγράψουμε από τον A τα στοιχεία της γραμμής i και της στήλης j. Ένας πιο πρακτικός τρόπος υπολογισμού του αντιστρόφου, με ευρύτερη εφαρμογή σε ασκήσεις προκύπτει από την εξής ιδιότητα.

Θεωρούμε έναν πίνακα $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ και εφαρμόζουμε σε αυτόν κάποιες γραμμοπράξεις στις γραμμές του, δηλαδή είτε αντιμεταθέτουμε κάποιες γραμμές του είτε προσθέτουμε το πολλαπλάσιο κάποιας γραμμής σε κάποια άλλη. Έτσι, προκύπτει ο πίνακας B. Τότε αν εφαρμόσουμε τις ίδιες γραμμοπράξεις στον πίνακα I_n θα προκύψει ο πίνακας R και θα ισχύει η σχέση $RA = B$. Με όμοιο σκεπτικό οι γραμμοπράξεις σε στήλες μπορούν να εκφραστούν με τον πίνακα C, όπου $AC = B$. Αν ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος τότε $A^{-1}A = I_n$ ή σύμφωνα με το προηγούμενο σκεπτικό, αν για να μετατρέψουμε τον A στον I_n χρειαζόμαστε μία σειρά από γραμμοπράξεις, και τις ίδιες εφαρμόσουμε στον πίνακα I_n τότε θα προκύψει ένας πίνακας R, ο οποίος θα είναι ίσος με τον πίνακα A^{-1}, δηλαδή θα έχουμε βρει τον αντίστροφο του A. Για εφαρμογή της τεχνικής αυτής, ο αναγνώστης καλείται να λύσει το πρόβλημα 1 του IMC 1994.

Ας περάσουμε τώρα σε μία ενότητα που θα μας παρέχει ισχυρά εργαλεία.

<u>Χαρακτηριστικό πολυώνυμο - ελάχιστο πολυώνυμο - ιδιοδιανύσματα και ιδιοτιμές</u>

Έστω πίνακας $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει μη μηδενικό διάνυσμα $u \in \mathbb{C}^n$ τέτοιο ώστε $Au = \lambda u$

για κάποιο $\lambda \in \mathbb{C}$. Τότε το u ονομάζεται ιδιοδιάνυσμα του πίνακα A και λ η αντίστοιχη ιδιοτιμή του διανύσματος αυτού. Η σχέση αυτή είναι ισοδύναμη με $(\lambda I_n - A)u = 0$. Αν $det(\lambda I_n - A) \neq 0$ τότε από αυτά που ειπώθηκαν προηγουμένως ξέρουμε ότι ο πίνακας $I_n - A$ αντιστρέφεται και επομένως $u = 0$, άτοπο. Για να είναι, λοιπόν, το λ ιδιοτιμή του πίνακα A θα πρέπει $det(\lambda I_n - A) = 0$. Η εξίσωση αυτή ονομάζεται χαρακτηριστική εξίσωση του πίνακα A και το πολυώνυμο $\chi_A(\lambda) = det(\lambda I_n - A) = \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + \alpha_0$ είναι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A.

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο μας δίνει μία αναδρομική σχέση υπολογισμού των δυνάμεων του πίνακα A μέσω του θεωρήματος Cayley-Hamilton. Το εν λόγω θεώρημα αποδεικνύει ότι $\chi_A(A) = \mathcal{O}_n$, όπου $\mathcal{O}_n$ είναι ο μηδενικός πίνακας.

Σχετικό με τα παραπάνω είναι το ελάχιστο πολυώνυμο του πίνακα A, το οποίο ορίζεται ώς το πολυώνυμο ελαχίστου βαθμού $m(t) \in \mathbb{R}[t]$ το οποίο είναι τέτοιο ώστε $m(A) = \mathcal{O}_n$. Το πολυώνυμο αυτό έχει ρίζα κάθε ιδιοτιμή το πίνακα A και διαιρεί κάθε άλλο πολυώνυμο που μηδενίζεται από τον πίνακα A, άρα $m(t)|\chi_A(t)$.

Πρόβλημα 1 IMC 2017
Να βρείτε όλα τα $\lambda \in \mathbb{C}$ ώστε να υπάρχει $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ έτσι ώστε $A^2 = A^T$ και το λ να είναι ιδιοτιμή του πίνακα A.

Λύση: Γράφουμε $(A^2)^T = A \Leftrightarrow (A^T)^2 = A \Leftrightarrow A^4 = A$. Δηλαδή το ελάχιστο πολυώνυμο του A διαιρεί το $p(x) = x^4 - x$ που έχει ως ρίζες τις $0, 1, \omega, \omega^2$, όπου ω οι τρίτες ρίζες της μονάδας. Επομένως, αν $\lambda \in \mathbb{C}$ είναι ιδιοτιμή του A τότε $\lambda \in \{0, 1, \omega, \omega^2\}$. Θα αποδείξουμε ότι το λ γίνεται να παίρνει κάθεμια εξ'αυτών των τιμών. Για παράδειγμα όταν $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ έχουμε τις ζητούμενες ιδιοτιμές, καθώς και την επιθυμητή ιδιότητα.

Στην συνέχεια εξετάζουμε μερικά πιο σύνθετα ζητήματα πινάκων τα οποία εμφανίζονται συχνά σε διαγωνισμούς.

Διαγωνοποίηση - Κανονική μορφή Jordan - Ταυτόχρονη Διαγωνοποίηση Θεωρούμε τον πίνακα $A \in \mathcal{O}_{n\times n}(\mathbb{R})$και υποθέτουμε ότι έχει n γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα $u_1, ..., u_n$. Τότε αν πολλαπλασιάσουμε τον A με τον πίνακα που έχει ως στηλες τα ιδιοδιανύσματα του A θα πάρουμε

$$A \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Au_1 & Au_2 & \dots & Au_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 u_1 & \lambda_2 u_2 & \dots & \lambda_n u_n \end{bmatrix}$$

όπου λ_i οι n ιδιοτιμές του πίνακα A, με το ιδιοδιάνυσμα u_i να ανιστοιχεί στην λ_i. Επιπλέον, το γινόμενο αυτό γράφεται ως:

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 u_1 & \lambda_2 u_2 & \dots & \lambda_n u_n \end{bmatrix} = U \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

με U να συμβολίζει τον πίνακα που έχει ως στήλες τα ιδιοδιανύσματα. Τα ιδιοδιανύσματα, όμως, υποθέσαμε ότι είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, οπότε ο πίνακας αυτός έχει πλήρες rank και επομένως είναι αντιστρέψιμος. Οπότε τελικά μπορούμε να γράψουμε

$$A = UDU^{-1}$$

με D να είναι ο διαγώνιος πίνακας που εκφράσαμε παραπάνω. Η διαδικασία αυτή που ακολουθήσαμε, σε συνδυασμό με αυτά που αναφέραμε περί των γραμμοπράξεων, αποδεικνύει ότι, κάθε πίνακας που έχει n γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα είναι διαγωνοποιήσιμος, δηλαδή υπάρχει σειρά από γραμμοπράξεις που τον φέρνουν σε διαγώνια μορφή. Ο πίνακας U είναι η βάση υπό την οποία ο πίνακας A είναι διαγώνιος. Η διαγώνια αυτή έκφραση και επιπλέον εκφράσεις που θα αναφέρουμε είναι χρήσιμες στην απλοποίηση υπολογισμών σε ασκήσεις.

Επειδή η συνθήκη γραμμικής ανεξαρτησίας είναι συνήθως απρόσιτη σε ασκήσεις διαγωνισμών, αναφέρουμε ότι εάν ένας πίνακας έχει n διακεκριμένες ιδιοτιμές τότε είναι διαγωνοποιήσιμος.

Παρ'όλα αυτά η διαγωνοποίηση δεν είναι πάντα εφικτή. Σε τέτοιες περιπτώσεις πρέπει να εφαρμόσουμε ισχυρότερες τεχνικές. Μία εξ'αυτών, η οποία καλύπτει όλες τις περιπτώσεις πινάκων, είναι η Jordan Μορφή. Συνοπτικά γράφουμε ότι κάθε πίνακας είναι όμοιος με ένα ευθύ άθροισμα από Jordan Blocks (περισσότερες λεπτομέρειες στο [3]). Γράφουμε, επομένως,

$$A = P \begin{bmatrix} \lambda_1 & n_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & n_2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} P^{-1}$$

όπου τα n_i παίρνουν τιμές 1 ή 0. Στην πράξη ωστόσο χρησιμοποιούμε συχνότερα τις παρακάτω μορφές και ιδιότητες:

- Ένας συμμετρικός πίνακας $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ έχει πραγματικές ιδιοτιμές και διαγωνοποιείται από ορθογώνιο πίνακα $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, δηλαδή πίνακα τέτοιον ώστε $UU^T = I_n$. Οπότε γράφουμε $A = UDU^T$.
- Ένας πίνακας $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ τριγωνοποιείται από έναν μοναδιαίο πίνακα U, δηλαδή τέτοιον ώστε $UU^* = I_n$. Οπότε γράφουμε $A = UDU^*$, όπου ο D είναι άνω τριγωνικός με τα στοιχεία στη διαγώνιο να είναι ίσα με τις ιδιοτιμές του A.
- Αν δύο πίνακες $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ αντιμετατίθονται, δηλαδή $AB = BA$, τότε υπάρχει U μοναδιαίος ώστε να τριγωνοποιεί και τον A και τον B. Επιπλέον, αν οι A, B είναι διαγωνοποιήσιμοι τότε είναι και ταυτόχρονα διαγωνοποιήσιμοι, δηλαδή υπάρχει P ώστε $A = PCP^{-1}$ και $B = PDP^{-1}$, όπου C, D διαγώνιοι πίνακες που έχουν ως τιμές τις ιδιοτιμές των αντίστοιχων πινάκων.

Προχωράμε στο επόμενο πρόβλημα που εφαρμόζει κάποιες από αυτές τις τεχνικές.

Πρόβλημα 3 Seemous 2018
Θεωρούμε $A, B \in \mathcal{M}_{2018}(\mathbb{R})$ έτσι ώστε $AB = BA$ και $A^{2018} = B^{2018} = I_n$. Να δείξετε ότι εάν $Tr(AB) = 2018$, τότε $Tr(A) = Tr(B)$.

Λύση: Σε αυτό το σήμειο αξίζει να αναφέρουμε πως το trace ενός πίνακα A είναι το άθροισμα των ιδιοτιμών του. Έτσι το $Tr(AB)$ είναι το άθροισμα των ιδιοτιμών του AB. Γράφοντας όμως $A = UT_AU^*$ και $B = UT_B^*$ (ταυτόχρονη τριγωνοποίηση) βλέπουμε ότι $AB = UT_AT_BU^*$, δηλαδή ο AB έχει ιδιοτιμές τα διαγώνια στοιχεία του άνω τριγωνικού πίνακα T_AT_B, δηλαδή το γινόμενο των ιδιοτιμών του A επί των αντίστοιχων ιδιοτιμών του B.

Παρατηρούμε τώρα ότι $A^{2018} = B^{2018} = I_n$, άρα το πολυώνυμο $(x-1)(x-\omega)(x-\omega^2)...(x-\omega^{2017})$ διαιρείται από τα ελάχιστα πολυώνυμα των πινάκων A, B και επομένως το σύνολο $\{1, \omega, \omega^2, ..., \omega^{2017}\}$ περιέχει όλες τις ιδιοτιμές των A και B. Επίσης, επειδή οι πίνακες είναι πραγματικοί, το χαρακτηριστικό τους πολυώνυμο θα έχει πραγματικούς συντελεστές, οπότε οι ιδιοτιμές τους θα είναι σε ζεύγη συζυγών μιγαδικών.

Έστω $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ και $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n$ οι ιδιοτιμές των πινάκων A και B, ώστε οι ιδιοτιμές του πίνακα AB να είναι οι $\lambda_1\mu_1, ..., \lambda_m, \mu_n$. Τότε $|Tr(AB)| = |\sum_{i=1}^n \lambda_i\mu_i| \leq \sum_{i=1}^n |\lambda_i\mu_i| = 2018$ με την ισότητα μόνο όταν $\lambda_i\mu_i = 1 \forall i$. Συνεπώς, αν ο A έχει ιδιοτιμή το ω^k τότε ο B θα έχει ιδιοτιμή το ω^{-k}. Επειδή είναι πραγματικοί πίνακες, θα έχουν και τους αντίστοιχους συζυγείς σαν ιδιοτιμές. Οπότε τα ω^k, ω^{-k} είναι ιδιοτιμές και των δύο πινάκων. Συνολικά λοιπόν οι A, B θα έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές και

$$Tr(A) = Tr(B)$$

Θετικά Ημιορισμένοι πίνακες
Ένας ερμιτιανός ($A^* = A$) πίνακας $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ονομάζεται θετικά ημιορισμένος, εάν για κάθε $x \in \mathbb{C}^n$ έχουμε $x^*Ax \geq 0$. Μια ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι ένας πίνακας θετικά ημιορισμένος είναι να έχει όλες τις ιδιοτιμές του μη αρνητικές. Ας δούμε την εφαρμογή αυτής της πρότασης στο παρακάτω πρόβλημα.

Πρόβλημα 2 Seemous 2018
Έστω m, n, p, q θετικοί ακέραιοι και $A \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{m\times p}(\mathbb{R})$, $C \in \mathcal{M}_{p\times q}(\mathbb{R})$, $D \in \mathcal{M}_{q\times n}(\mathbb{R})$ τέτοιοι ώστε:

$$A^T = BCD, B^T = CDA, C^T = DAB, D^T = ABC$$

Να αποδείξετε ότι $(ABCD)^2 = ABCD$.

Λύση: Θέτουμε $X = ABCD \in \mathcal{M}_{n\times\nu}(\mathbb{R})$. Αν πολλαπλασιάσουμε τις τέσσερεις σχέσεις κατα μέλη βρίσκουμε $D^T C^T B^T A^T = (ABCD)^3 \Leftrightarrow (ABCD)^T = (ABCD)^3 \Rightarrow X^T = X^3 \Rightarrow X = (X^3)^T = (X^T)^3 = X^9$. Συνεπώς το ελάχιστο πολυώνυμο του πίνακα X διαιρεί το $x^9 - x = x(x^8 - 1) = x(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)$ και οι πιθανές ιδιοτιμές του πίνακα θα μηδενίζουν το πολυώνυμο αυτό.

Παρατηρούμε επιπλέον ότι $X = A(BCD) = AA^T$ και $(AA^T)^* = \overline{AA^T}^T = (AA^T)^T = AA^T$, οπότε ο X είναι ερμιτιανός και $x^* AA^T x = ||A^T x|| \geq 0$, δηλαδή είναι θετικά ημιορισμένος. Επειδή είναι ερμιτιανός, κάθε ιδιοτιμή του θα είναι πραγματική και επιπλέον κάθε ιδιοτιμή του θα είναι μή αρνητική. Σε συνδυασμό με τα προηγούμενα καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι πιθανές τιμές για τις ιδιοτιμές του πίνακα είναι το 0 και το 1. Οπότε το ελάχιστο πολυώνυμο του θα διαρεί το $x(x-1)$ και επομένως $X(X - I_n) = \mathcal{O}_n \Leftrightarrow X^2 = X$.

Χρήση πινάκων κατά Block

Ένα τελευταίο ζήτημα σπουδαίας σημασίας που θα σχολιάσουμε είναι η χρήση των πινάκων σε μπλοκ. Αυτό που εννοούμε όταν χρησιμοποιούμε την έκφραση αυτή είναι ότι σε αρκετές περιπτώσεις γράφουμε έναν τετραγωνικό πίνακα $P \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{C})$ στην μορφή:

$$P = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

, όπου $A \in \mathcal{M}_{k\times k}(\mathbb{C}), B \in \mathcal{M}_{k\times(n-k)}(\mathbb{C}), C \in \mathcal{M}_{(n-k)\times k}(\mathbb{C}), D \in \mathcal{M}_{(n-k)\times(n-k)}(\mathbb{C})$. Η έκφραση αυτή του πίνακα P σε μπλοκ (υποπίνακες) είναι συχνά χρήσιμη δίοτι μας διευκολύνει στις πράξεις, όπως για παράδειγμα σε πολλαπλασιασμούς πινάκων. Αυτό συμβαίνει διότι σε αρκετές περιπτώσεις οι πράξεις που χρησιμοποιούμε για βαθμωτά μεγέθη συμπίπτουν με αυτές για πίνακες-μπλοκ.

Παράδειγμα: Το γινόμενο των πινάκων $P = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} Q & \Upsilon \\ Z & W \end{bmatrix}$ είναι

$$PQ = \begin{bmatrix} AX + BZ & AY + BW \\ CX + DZ & CY + DW \end{bmatrix}$$

όπου πρέπει οι πίνακες να έχουν κατάλληλες διαστάσεις ώστε οι εκφράσεις να έχουν νόημα.

Ένα σπουδαίο υπολογιστικό αποτέλεσμα που αφορά τους πίνακες σε έκφραση κατά block αναφέρεται στο [3] και είναι το εξής:
"Ορίζουσα κατα μπλοκ" Θεωρούμε τον τετραγωνικό πίνακα $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$, με A, B, C, D επίσης τετραγωνικοί πίνακες. Αν ισχύει $AC = CA$ τότε $det(M) = det(AD - CB)$.

Το αποτέλεσμα αυτό χρησιμοποιούμε στο παρακάτω πρόβλημα.

Πρόβλημα 8 IMC 2017

Ορίζουμε την ακολουθία πινάκων $A_1, A_2, ...$ ως εξής: $A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ και $A_{n+1} = \begin{bmatrix} A_n & I_{2^n} \\ I_{2^n} & A_n \end{bmatrix}$.

Να αποδείξετε ότι ο A_n έχει $n+1$ ιδιοτιμές $\lambda_0 < \lambda_1 < ... < \lambda_n$ με πολλαπλότητες $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, ..., \binom{n}{n}$, αντίστοιχα.

Λύση: Θεωρούμε τα χαρακτηριστικά πολυώνυμα $p_n(x) = det(xI_{2^n} - A_n)$, των πινάκων της ακολουθίας. Η εύρεση των ριζών του $p_n(x)$ συνεπάγεται προσδιορισμό των ιδιοτιμών του αντίστοιχου πίνακα. Παρατηρούμε ότι

$$p_{n+1}(x) = det(xI_{2^{n+1}} - A_{n+1}) = det\left(\begin{bmatrix} xI_{2^n} - A_n & \mathcal{O}_{2^n} - I_{2^n} \\ \mathcal{O}_{2^n} - I_{2^n} & xI_{2^n} - A_n \end{bmatrix})\right) = det\left(\begin{bmatrix} xI_{2^n} - A_n & -I_{2^n} \\ -I_{2^n} & xI_{2^n} - A_n \end{bmatrix})\right) =$$

$$= det((xI_{2^n} - A_n)^2 - I_{2^n}) = det(xI_{2^n} - A_n - I_{2^n})det(xI_{2^n} - A_n + I_{2^n}) = p_n(x-1)p_n(x+1)$$

Οπότε αν το $p_n(x)$ έχει ρίζες $r_{2^n 1}, r_{2^n 2}, ..., r_{2^n 2^n}$ τότε το p_{n+1} έχει ρίζες $r_{2^{n+1}1} = r_{2^n 1} - 1, r_{2^{n+1}2} = r_{2^n 2^n} - 1, ..., r_{2^{n+1}2^n} = r_{2^n 1} - 1$ και $r_{2^{n+1}(2^n+1)} = r_{2^n 1} + 1, r_{2^{n+1}(2^n+2)} = r_{2^n 2} + 1, ..., r_{2^{n+1}2^{n+1}} = r_{2^n 2^n} + 1$. Ξεκινώντας από το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A_1 με ρίζες $-1, 1$ βρίσκουμε το $p_2(x)$ με ρίζες $-2, 0, 0, 2$, το $p_3(x)$ με ρίζες $-3, -1, -1, -1, 1, 1, 1, 3$ κ.ο.κ.

Διαπιστώνουμε ότι κάθε ρίζα του πολυωνύμου $p_n(x)$ είναι άθροισμα της μορφής $\sum_{i=1}^{n}(\pm 1)$ για όλες τις 2^n διαφορετικές επιλογές προσήμων. Επομένως οι ρίζες του p_n διακρίνονται ανάλογα με το πλήθος των θετικών προσήμων που επιλέγουμε στο άθροισμα.

Μπορούμε να επιλέξουμε από μηδέν (ελάχιστη ρίζα λ_0), εώς n (μέγιστη ρίζα λ_n) θετικά πρόσημα. Επίσης αν επιλέξουμε ακριβώς k θετικά πρόσημα, τότε θα προκύψει η $k-$ οστή μεγαλύτερη ρίζα, η οποία θα έχει πολλαπλότητα $\binom{n}{k}$ αφού αυτό είναι ακριβώς το πλήθος των τρόπων να επιλέξουμε ακριβώς k άσσους για να τους κάνουμε θετικούς.

Παραθέτουμε, τέλος, ένα πιο σύνθετο πρόβλημα πινάκων που παρουσιάστηκε στον IMC 2018.

Πρόβλημα 3 IMC 2018: Να προσδιορίσετε όλους τους ρητούς αριθμούς α για τους οποίους ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & -\alpha & -1 & 0 \\ \alpha & -\alpha & 0 & -1 \\ 1 & 0 & \alpha & -\alpha \\ 0 & 1 & \alpha & -\alpha \end{bmatrix}$$

είναι το τετράγωνο ενός πίνακα με ρητούς συντελεστές.

Λύση: Γράφουμε $A = B^2$ για $B \in \mathcal{M}_4(\mathbb{Q})$. Τα χαρακτηριστικά πολυώνυμα των A, B είναι αντίστοιχα τα $p(x) = det(xI - A) = (x^2+1)^2$, όπως προκύπτει έπειτα από υπολογισμούς και $q(x) = det(xI - B)$. Παρατηρούμε όμως ότι $(x^4+1)^2 = p(x^2) = det(x^2 I - A)det(x^2 I - A^2) = det(xI - B)det(xI + B) = q(x)det(xI + B)$, οπότε το $q(x)$ διαιρεί το $(x^4+1)^2$.

Το $q(x)$ όμως είναι πολυώνυμο με ρητούς συντελεστές, ενώ το x^4+1 είναι ανάγωγο στο $\mathbb{Q}$. Οπότε $q(x) = x^4+1$ (αφού πρέπει το $q(x)$ να είναι τετάρτου βαθμού). Από Cayley-Hamilton λοιπόν $B^4 + I_4 = 0$ ή ισοδύναμα $A^2 + I_4$ που έπειτα από πράξεις δίνει ότι $\alpha = 0$. για $\alpha = 0$ γράφουμε

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Βιβλιογραφία

Τα παρακάτω βιβλία χρησιμοποιήθηκαν για την συγγραφή του κειμένου και συστήνονται για περαιτέρω μελέτη.

1. Φελλούρης Ανάργυρος. *Γραμμική Άλγεβρα και Αναλυτική Γεωμετρία*. Αθήνα, 2015.
2. Andreescu Titu & Gelca Razvan. *Putnam and Beyond*. Springer, 2007.
3. Zhang, Fuzhen. *Matrix Theory: Basic Results and Techniques*. Springer, 2011.
4. Bapat R., *Linear Algebra and Linear Models*. Springer, 2000.