Προετοιμασία για τον SEEMOUS 2024 - Νίκος Γκούμας

Επιμέλεια: Ορέστης Λιγνός (μαθητής Γ' Λυκείου)

Τελευταία ενημέρωση: 25/12/2023

1 Πρόλογος

Αυτή η εργασία περιλαμβάνει τις λύσεις 10 προβλημάτων που συζητήθηκαν στα πλαίσια της προετοιμασίας των φοιτητών του Μαθηματικού Τμήματος του ΕΚΠΑ στο μάθημα της 4ης Νοεμβρίου 2023, με διδάσκοντα τον μεταπτυχιακό φοιτητή Νίκο Γκούμα. Την επιμέλεια των λύσεων την είχε ο Ορέστης Λιγνός. Επικοινωνήστε στο email μου (orelig2006@gmail.com) για οποιαδήποτε σφάλματα ή διευκρινίσεις.

2 Προβλήματα

2.1 Πρόβλημα 1

Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχώς διαφορίσιμη συνάρτηση με $0 \le f'(x) \le 1$ και $f(0) = 0$. Να δείξετε ότι

$$(\int_0^1 f(t)\,dt)^2 \ge \int_0^1 f^3(t)\,dt.$$

2.2 Πρόβλημα 2:

Να βρείτε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοιες, ώστε

$$f(-x) + \int_0^x t f(t-x)\,dt = x,$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

2.3 Πρόβλημα 3:

Έστω $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις τέτοιες ώστε η συνάρτηση f να είναι φθίνουσα στο $[a,b]$ και $0 \le g(x) \le 1$ για κάθε $x \in [a,b]$. Αν $\mu = \int_a^b g(x)\,dx$, να δείξετε ότι

$$\int_{b-\mu}^b f(x)\,dx \le \int_a^b f(x)g(x)\,dx \le \int_a^{a+\mu} f(x)\,dx.$$

2.4 Πρόβλημα 4:

Έστω ακολουθία (x_n) τέτοια, ώστε $x_0 = 1$ και $x_{n+1} = \ln(e^{x_n} - x_n)$ για κάθε $n \ge 0$. Να δείξετε ότι η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ συγκλίνει, και να βρείτε το άθροισμά της.

2.5 Πρόβλημα 5:

Έστω (x_n) ακολουθία στο $\mathbb{R}$ με $|x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n| \le \frac{1}{n^2}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.
Να αποδείξετε ότι η ακολουθία (y_n) με $y_n = \dfrac{x_n}{n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό.

2.6 Πρόβλημα 6:

Έστω φραγμένη ακολουθία (a_n) τέτοια ώστε $a_n + \dfrac{a_{2n}}{2} \to 1$. Να αποδείξετε ότι η ακολουθία (a_n) συγκλίνει και, στη συνέχεια, να υπολογίσετε το όριό της.

2.7 Πρόβλημα 7:

Να υπολογίσετε τα εξής αθροίσματα:

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$,

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)2^n}$ και

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)2^n}$.

2.8 Πρόβλημα 8:

Να βρείτε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που είναι τέτοιες, ώστε

$$2g(2x) = g(x) - 7x^2 - 1,$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

2.9 Πρόβλημα 9:

Αν (a_n) ακολουθία μη αρνητικών όρων τέτοια, ώστε $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 3$, να υπολογίσετε το

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_1 + 2a_2 + \ldots + na_n}{n(n+1)}.$$

2.10 Πρόβλημα 10:

Αν η συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και

$$\int_0^1 x^k f(x)\, dx = 0$$

για κάθε $k \in \mathbb{N}$, να αποδείξετε ότι $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [0,1]$.

3 Λύσεις των προβλημάτων

3.1 Λύση του προβλήματος **1:**

Έστω η συνάρτηση

$$g(x) = (\int_0^x f(t)\,dt)^2 - \int_0^x f^3(t)dt,$$

με $x \in [0,1]$. Θέλουμε να δείξουμε ότι $g(1) \geq 0$. Η συνάρτηση g είναι δύο φορές παραγωγίσιμη, με

$$g'(x) = 2\int_0^x f(t)\,dt - f^2(x)$$

και $g''(x) = 2f(x)(1 - f'(x))$. Αφού $f'(x) \geq 0$ και $f(0) = 0$, είναι $f(x) \geq f(0) = 0$, συνεπώς, $g''(x) \geq 0$, άρα η g' είναι αύξουσα, συνεπώς

$$g'(x) \geq g'(0) = 0,$$

άρα και η g είναι αύξουσα, οπότε έχουμε ότι $g(1) \geq g(0) = 0$, όπως θέλαμε.

3.2 Λύση του προβλήματος **2:**

Με $x = 0$ προκύπτει ότι $f(0) = 0$. Κάνουμε την αλλαγή μεταβλητής $t - x = -u$, οπότε η ζητούμενη συνθήκη γράφεται

$$\int_0^x (x-u)f(-u)\,du = x - f(-x),$$

οπότε παραγωγίζοντας προκύπτει μετά από πράξεις ότι $\int_0^x f(-u)\,du = 1 + f'(-x)$, και παραγωγίζοντας ξανά έχουμε ότι $f''(-x) = -f(x)$, δηλαδή $f'' = -f$, που από την Θεωρία των διαφορικών εξισώσεων έχει τη γενική λύση $f(x) = c_1 \sin x + c_2 \cos x$. Αφού $f(0) = 0$, πρέπει $c_2 = 0$. Τέλος, είναι

$$\int_0^x tf(t-x)\,dx = c_1 \int_0^x t\sin(t-x)\,dx = c_1(\sin x - x)$$

και άρα $c_1(\sin x - x) = x - c_1 sin(-x)$, που δίνει ότι $c_1 = -1$, άρα η μόνη συνάρτηση που ικανοποιεί είναι η $f(x) = -\sin x$.

3.3 Λύση του προβλήματος **3:**

Για την δεξιά ανισότητα, θεωρούμε την συνάρτηση

$$K(t) = \int_a^{a+\int_a^t g(x)\,dx} f(x)\,dx - \int_a^t f(x)g(x)\,dx,$$

και ζητούμε να δείξουμε ότι $K(b) \geq 0$. Είναι

$$K'(t) = g(t)(f(a + \int_a^t g(x)\,dx) - f(t)),$$

και αφού $g(t) \geq 0$ στο $[,a,b]$ και

$$f(a + \int_a^t g(x)\,dx) - f(t) \geq f(a + \int_a^t 1\,dx) - f(t) = 0,$$

είναι $K'(t) \geq 0$, οπότε η K είναι αύξουσα, όπερ σημαίνει $K(b) \geq K(a) = 0$, όπως θέλαμε.

Εργαζόμαστε παρόμοια για την αριστερή ανισότητα.

3.4 Λύση του προβλήματος **4:**

Αρχικά παρατηρούμε ότι η ακολουθία (x_n) είναι καλώς ορισμένη, λόγω της ανισότητας $e^x \geq x + 1$. Είναι,

$$x_{n+1} = \ln(e^{x_n} - x_n) \iff x_n = e^{x_n} - e^{x_{n+1}},$$

συνεπώς έχουμε ότι

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = \sum_{i=1}^{n}(e^{x_i} - e^{x_{i+1}}) = e^{x_1} - e^{x_{n+1}},$$

για κάθε n. Όμως, είναι

$$x_{n+1} = \ln(e^{x_n} - x^n) \geq \ln 1 = 0,$$

άρα $x_n \geq 0$ για κάθε $n \geq 0$, και επομένως

$$e^{x_n} - e^{x_{n+1}} = x_n \geq 0,$$

που δίνει ότι η ακολουθία (x_n) είναι φθίνουσα, ενώ αποδείξαμε ότι είναι και κάτω φραγμένη, άρα συγκλίνει. Έστω $a_n \to \ell$, συνεπώς από την αρχή της μεταφοράς

$$\ell = \ln(e^\ell - \ell),$$

που δίνει ότι $\ell = 0$, άρα $a_n \to 0$. Τελικά, συμπεραίνουμε ότι

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = e^{x_1} - e^{x_{n+1}} \to e^1 - e^0 = e - 1,$$

δηλαδή η ζητούμενη σειρά ισούται με $e - 1$.

3.5 Λύση του προβλήματος **5:**

Ισχυριζόμαστε ότι η ακολουθία $z_n = x_{n+1} - x_n$ συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό. Λόγω της συνθήκης, είναι $|z_{n+1} - z_n| \leq \frac{1}{n^2}$. Παρατηρούμε ότι

$$|z_m - z_n| = |(z_m - z_{m-1}) + \ldots + (z_{n+1} - z_n)| \leq |z_m - z_{m-1}| + \ldots + |z_{n+1} - z_n| \leq$$

$$\leq \frac{1}{(m-1)^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{1^2} + \ldots + \frac{1}{(m-1)^2},$$

άρα αφού η αρμονική σειρά τάξης 2 συγκλίνει, για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει N ώστε $|z_m - z_n| < \epsilon$ για κάθε $m, n \geq N$, δηλαδή η ακολουθία (z_n) είναι ακολουθία Cauchy, άρα συγκλίνει.

Πίσω στο πρόβλημα, λόγω του Λήμματος που αποδείξαμε και του Λήμματος Cesàro-Stolz, έχουμε άμεσα το ζητούμενο.

3.6 Λύση του προβλήματος 6 (Μανώλης Πετράκης):

Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $a_n + \dfrac{a_{2n}}{2} \to 0$. Έστω $\epsilon > 0$. Τότε, ισχύει ότι $|a_n + \dfrac{a_{2n}}{2}| < \dfrac{\epsilon}{4}$ για κάθε $n \geq N$. Συνεπώς, είναι και $|a_{2n} + \dfrac{a_{4n}}{2}| < \dfrac{\epsilon}{4}$, άρα

$$a_{4n} > -\frac{\epsilon}{2} - 2a_{2n} > -\epsilon + 4a_n,$$

και όμοια $a_{4n} < \epsilon + 4a_n$, άρα προκύπτει ότι $|a_{4n} - 4a_n| < \epsilon$ για κάθε $n \geq N$. Επαγωγικά τώρα αποδεικνύουμε ότι

$$|a_{4^k n} - 4^k a_n| < (4^{k-1} + \ldots + 4^0)\epsilon$$

(η βάση της επαγωγής η $k = 1$ που αποδείξαμε τώρα, και για το επαγωγικό βήμα ακολουθούμε παρόμοια διαδικασία με πριν). Άρα, προκύπτει ότι

$$\frac{a_{4^k n} - (4^{k-1} + \ldots + 4^0)\epsilon}{4^k} < a_n < \frac{a_{4^k n} + (4^{k-1} + \ldots + 4^0)\epsilon}{4^k},$$

και αφού η (a_n) είναι φραγμένη, υπάρχει M με $|a_n| \leq M$ για κάθε n, άρα έχουμε ότι

$$|a_n| < \frac{M + (4^{k-1} + \ldots + 4^0)\epsilon}{4^k} < \frac{M}{4^k} + \frac{\epsilon}{3}$$

για κάθε k, συνεπώς συνάγουμε ότι $|a_n| < \dfrac{\epsilon}{3}$. Οπότε, έχουμε αποδείξει ότι για κάθε $\epsilon > 0$ και αρκετά μεγάλα n ισχύει ότι $|a_n| \leq \dfrac{\epsilon}{3}$, οπότε $a_n \to 0$, και η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

3.7 Λύση του προβλήματος 7 (Νίκος Γκούμας):

(i) Έστω η συνάρτηση $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n}$, με $x \in (-1, 1)$. Είναι εύκολο να ελέγξουμε ότι η f είναι καλώς ορισμένη στο $(-1, 1)$ (με το κριτήριο λόγου), και άρα μπορούμε να γράψουμε

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{x^n}{n})' = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x},$$

και αφού $f(0) = 0$, είναι $f(x) = -\ln(1-x)$ για κάθε $x \in (-1, 1)$, οπότε και $f(\dfrac{1}{2}) = \ln 2$.

Ομοίως εργαζόμαστε για τα άλλα δυο ερωτήματα (χρησιμοποιούμε την f'' και την f'''). Τα αθροίσματα είναι ίσα με $1 - \ln 2$ και $\dfrac{\ln 4 - 1}{4}$, αντίστοιχα.

3.8 Λύση του προβλήματος 8 (Ορέστης Λιγνός):

Με $x = 0$ προκύπτει ότι $g(0) = -1$. Θέτουμε $g(x) = h(x) - 1$, οπότε $2h(2x) = h(x) - 7x^2$. Θέτουμε τώρα $h(x) = -x^2 + k(x)$, συνεπώς έχουμε ότι $2k(2x) = k(x)$. Άρα, αν $t(x) = xk(x)$ για κάθε x, έχουμε πως $t(x) = t(2x)$.

Η συνάρτηση t είναι συνεχής, και άρα αφού η ακολουθία $y_n = \frac{x}{2^n}$ συγκλίνει στο 0, λόγω της αρχής μεταφοράς και της επαγωγής είναι

$$t(x) = t(\frac{x}{2^n}) \to t(0),$$

συνεπώς η συνάρτηση t είναι σταθερή, άρα $g(x) = \frac{c}{x} - x^2 - 1$ για κάθε $x \neq 0$, ενώ $g(0) = -1$, και αφού πρέπει η g να είναι συνεχής πρέπει να είναι $c = 0$, δηλαδή τελικά $g(x) = -x^2 - 1$.

Παρατηρήστε ότι, πιο γενικά, μπορούμε να γράψουμε $g(x) = ax^2 + bx + c + k(x)$ για κατάλληλα a, b, c, και στην συγκεκριμένη περίπτωση να αποδείξουμε ότι $a = -1, b = 0, c = -1$, και η k ικανοποιεί $2k(2x) = k(x)$.

3.9 Λύση του προβλήματος 9 (Ορέστης Λιγνός):

Θέτουμε $b_i = ia_i$ και $c_i = a_1 + \ldots + a_i$, για κάθε i, συνεπώς $c_n \to 3$. Τότε, το μερικό άθροισμα της σειράς της οποίας ψάχνουμε το άθροισμα ισούται με

$$d_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{b_1 + \ldots + b_i}{i(i+1)} = \ldots = \sum_{i=1}^{n} (\frac{1}{i} - \frac{1}{n+1}) b_i = c_n - \frac{\sum_{i=1}^{n} b_i}{n+1}.$$

Όμως,

$$\sum_{i=1}^{n} b_i = \sum_{i=1}^{n} i(c_{i+1} - c_i) = nc_{n+1} - (c_1 + \ldots + c_n),$$

και άρα

$$d_n = c_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} b_i}{n+1} \to c_n - \frac{nc_{n+1} - (c_1 + \ldots + c_n)}{n+1} = c_n - [\frac{n}{n+1} \cdot c_{n+1} - \frac{c_1 + \ldots + c_n}{n} \cdot \frac{n}{n+1}],$$

ενώ $c_n \to 3$ και $\dfrac{c_1 + \ldots + c_n}{n} \to 3$ (εύκολη απόδειξη με τον ορισμό), συνεπώς $d_n \to 3$, δηλαδή το άθροισμα της σειράς ισούται με 3.

Παρατηρήστε ότι μια ισομορφική λύση μπορεί να δοθεί με χρήση του Abel Summation Formula, ή ακόμα και με χρήση του Θεωρήματος του Tonelli.

3.10 Λύση του προβλήματος 10:

Παρατηρούμε άμεσα ότι $\int_0^1 p(x)f(x)\,dx = 0$, καθώς κάθε πολυώνυμο είναι γραμμικός συνδυασμός μονωνύμων. Έστω ένα $\epsilon > 0$. Τότε, αν $M = \sup|f|$, από το Προσεγγιστικό Θεώρημα του Weierstrass υπάρχει πολυώνυμο p τέτοιο, ώστε $|p - f| < \frac{\epsilon}{M}$. Επομένως,

$$\int_0^1 f^2(x)\,dx = \int_0^1 (f^2(x) - f(x)p(x))\,dx \leq$$
$$\int_0^1 |f(x)| \cdot |p(x) - f(x)|\,dx \leq M \cdot \frac{\epsilon}{M} = \epsilon,$$

συνεπώς το (μη αρνητικό) ολοκλήρωμα της f^2 είναι $< \epsilon$, για κάθε $\epsilon > 0$, άρα ισούται με 0, οπότε έχουμε ότι $f^2 = 0$, δηλαδή $f = 0$, όπως θέλαμε.