

4 Μέτρα γινόμενο - Θεώρημα Fubini

Ορισμός 4.1 \mathcal{A}^{ν^1} (X, \mathcal{A}) και (Y, \mathcal{B}) είναι μετρήσιμοι χώροι, τα σύνολα $A \times B$ όπου $A \in \mathcal{A}$ και $B \in \mathcal{B}$ λέγονται **μετρήσιμα ορθογώνια**. Ορίζουμε²

$$\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} = \mathcal{M}\{A \times B \subseteq X \times Y : A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}.$$

Παρατήρηση $\mathcal{B}_{\mathbb{C}} = \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.

Πρόταση 4.1 Αν (Z, \mathcal{C}) είναι μετρήσιμος χώρος και $f : Z \rightarrow X \times Y$, τότε η f είναι \mathcal{C} - $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ -μετρήσιμη αν και μόνον αν η $\pi_1 \circ f : Z \rightarrow X$ είναι \mathcal{C} - \mathcal{A} -μετρήσιμη και η $\pi_2 \circ f : Z \rightarrow Y$ είναι \mathcal{C} - \mathcal{B} -μετρήσιμη (όπου π_i οι καρτεσιανές προβολές $X \times Y \rightarrow X$ και $X \times Y \rightarrow Y$).

Πόρισμα 4.2 Έστω (Z, \mathcal{C}) μετρήσιμος χώρος και $f_1, f_2 : Z \rightarrow \mathbb{R}$.

(α) Αν οι f_1, f_2 είναι μετρήσιμες, τότε οι $f_1 + f_2 : Z \rightarrow \mathbb{R}$ και $f_1 f_2 : Z \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μετρήσιμες.

(β) Οι f_1, f_2 είναι μετρήσιμες αν και μόνον αν η $f_1 + i f_2 : Z \rightarrow \mathbb{C}$ είναι μετρήσιμη.

Πρόταση 4.3 Αν (X, \mathcal{A}, μ) και (Y, \mathcal{B}, ν) είναι χώροι μέτρου, υπάρχει μέτρο

$$\pi \equiv \mu \times \nu : \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \rightarrow [0, +\infty]$$

ώστε

$$\pi(A \times B) = \mu(A)\nu(B) \quad \text{όταν } A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}.$$

Αν τα μ, ν είναι σ -πεπερασμένα, τότε το π είναι μοναδικό και σ -πεπερασμένο.

Η ιδέα της απόδειξης. Το π ορίζεται καλά στην οικογένεια \mathcal{C} των πεπερασμένων ξένων ενώσεων μετρησίμων ορθογώνιων. Η \mathcal{C} είναι άλγεβρα (Πρόταση 1.7). Επεκτείνουμε το π στην $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ χρησιμοποιώντας το Θεώρημα επέκτασης Καραθεοδωρή.

Ορισμός 4.2 (Τομές (sections)) Αν $E \subseteq X \times Y$ και $f : X \times Y \rightarrow Z$, για κάθε $(x, y) \in X \times Y$ θέτουμε

$$\begin{aligned} E_x &= \{v \in Y : (x, v) \in E\} \subseteq Y \\ E^y &= \{s \in X : (s, y) \in E\} \subseteq X \\ f_x : Y &\rightarrow Z & f_x(v) &= f(x, v) \quad (v \in Y) \\ f^y : X &\rightarrow Z & f^y(s) &= f(s, y) \quad (s \in X). \end{aligned}$$

Παράδειγμα $(\chi_E)_x = \chi_{E_x}$.

Πρόταση 4.4 Αν $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ τότε για κάθε $(x, y) \in X \times Y$,

$$E_x \in \mathcal{B}, \quad E^y \in \mathcal{A}.$$

¹fubiniw, 24 Dec. 08

²Βεβαίως το σύνολο $\{A \times B : A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}$ δεν είναι άλγεβρα συνόλων, είναι όμως «στοιχειώδης οικογένεια» (Ορισμός 1.4).

Πρόταση 4.5 Αν $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{C}$ είναι $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ -μετρήσιμη τότε για κάθε $(x, y) \in X \times Y$,

$$f_x \text{ είναι } \mathcal{B}\text{-μετρήσιμη,} \quad f^y \text{ είναι } \mathcal{A}\text{-μετρήσιμη.}$$

Απόδειξη Παρατήρησε ότι, αν $U \subseteq \mathbb{C}$ είναι ανοικτό, τότε για κάθε $x \in X$ έχουμε (γιατί;)

$$f_x^{-1}(U) = (f^{-1}(U))_x.$$

Θεώρημα 4.6 (Fubini για χαρακτηριστικές) Θεωρούμε χώρους σ -πεπερασμένου μέτρου (X, \mathcal{A}, μ) και (Y, \mathcal{B}, ν) . Για κάθε $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$,

(α) οι συναρτήσεις

$$X \rightarrow [0, +\infty] : x \rightarrow \nu(E_x) = \int_Y \chi_E(x, y) d\nu(y)$$

$$Y \rightarrow [0, +\infty] : y \rightarrow \mu(E^y) = \int_X \chi_E(x, y) d\mu(x)$$

είναι \mathcal{A} (αντιστοίχως \mathcal{B}) μετρήσιμες και

(β) ισχύουν οι ισότητες

$$\int_X \left(\int_Y \chi_E(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int_Y \left(\int_X \chi_E(x, y) d\mu(x) \right) d\nu(y) = (\mu \times \nu)(E)$$

δηλαδή

$$(\mu \times \nu)(E) = \int_X \nu(E_x) d\mu(x) = \int_Y \mu(E^y) d\nu(y). \quad (1)$$

Η ιδέα της απόδειξης Υποθέτουμε πρώτα ότι $\mu(X) < \infty$ και $\nu(Y) < \infty$. Θεωρούμε την οικογένεια $\Theta \subseteq \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ των συνόλων για τα οποία (όλα) τα συμπεράσματα του Θεωρήματος ισχύουν. Παρατηρούμε ότι η Θ περιέχει όλα τα μετρήσιμα ορθογώνια. Αποδεικνύουμε ότι η Θ είναι κλειστή ως προς πεπερασμένες ξένες ενώσεις, άρα περιέχει την άλγεβρα \mathcal{C} που παράγουν τα μετρήσιμα ορθογώνια. Αποδεικνύουμε ότι η Θ είναι κλειστή ως προς αύξουσες ενώσεις (Θεώρημα μονότονης σύγκλισης) καθώς και ως προς φθίνουσες τομές (Θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης). Έπεται τότε (δες το επόμενο Λήμμα) ότι η Θ περιέχει την σ -άλγεβρα που παράγουν τα μετρήσιμα ορθογώνια, άρα $\Theta = \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$.

Η επέκταση στην περίπτωση σ -πεπερασμένων μέτρων γίνεται γράφοντας τον $X \times Y$ ως αριθμήσιμη ξένη ένωση μετρησίμων ορθογωνίων πεπερασμένου μέτρου και εφαρμόζοντας την γραμμικότητα των ολοκληρωμάτων και το Θεώρημα Beppo Levi.

Λήμμα 4.7 (Μονοτόνων κλάσεων) Έστω \mathcal{C} μια άλγεβρα συνόλων και \mathcal{M} μια οικογένεια που είναι κλειστή ως προς αύξουσες ενώσεις και ως προς φθίνουσες τομές (μια τέτοια \mathcal{M} λέγεται μονότονη κλάση). Αν η \mathcal{M} περιέχει την \mathcal{C} , τότε περιέχει την σ -άλγεβρα $\mathcal{M}(\mathcal{C})$ που παράγει η \mathcal{C} .

Απόδειξη Παραλείπεται.

Πρόταση 4.8 (Αρχή Cavalieri) Αν (X, \mathcal{A}, μ) και (Y, \mathcal{B}, ν) είναι χώροι σ -πεπερασμένου μέτρου και $E, F \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, τότε

$$\begin{aligned} (\mu \times \nu)(E) = (\mu \times \nu)(F) &\iff \nu(E_x) = \nu(F_x) \quad \mu\text{-σχεδόν για κάθε } x \in X \\ &\iff \mu(E^y) = \mu(F^y) \quad \nu\text{-σχεδόν για κάθε } y \in Y. \end{aligned}$$

Απόδειξη Άμεση από την σχέση (1) στο Θεώρημα 4.6.

Παρατήρηση 4.9 Με τις υποθέσεις του Θεωρήματος 4.6, αν η

$$f : X \times Y \rightarrow [0, +\infty] \quad \text{με} \quad f(x, y) = \sum_{k=1}^N c_k \chi_{E_k}(x, y) \quad (c_k \geq 0)$$

είναι απλή και $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ -μετρήσιμη, τότε η $\phi_f : X \rightarrow [0, +\infty]$ με

$$\phi_f(x) = \int_Y f(x, y) d\nu(y) = \sum_k c_k \nu((E_k)_x)$$

είναι \mathcal{A} μετρήσιμη³ ως γραμμικός συνδυασμός μετρησίμων συναρτήσεων.

Επιπλέον έχουμε

$$\int_X \left(\int_Y f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int_X \phi_f(x) d\mu(x) = \sum_k c_k \int_X \nu((E_k)_x) d\mu(x) = \sum_k c_k \pi(E)$$

(όπου $\pi = \mu \times \nu$) συνεπώς

$$\int_X \left(\int_Y f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x) = \sum_k c_k \pi(E) = \int_{X \times Y} f(x, y) d\pi(x, y).$$

Γενικότερα,

Θεώρημα 4.10 (Tonelli) Έστω $f : X \times Y \rightarrow [0, +\infty]$ όπου οι (X, \mathcal{A}, μ) και (Y, \mathcal{B}, ν) είναι χώροι σ -πεπερασμένου μέτρου. Αν η f είναι $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ -μετρήσιμη, τότε

(α) οι συναρτήσεις

$$\begin{aligned} X \rightarrow [0, +\infty] : x &\rightarrow \int_Y f(x, y) d\nu(y) \\ Y \rightarrow [0, +\infty] : y &\rightarrow \int_X f(x, y) d\mu(x) \end{aligned}$$

είναι \mathcal{A} (αντιστοίχως \mathcal{B}) μετρήσιμες και

(β) ισχύουν οι ισότητες $\iint f d\nu d\mu = \iint f d\mu d\nu = \int f d\pi$, δηλαδή

$$\int_X \left(\int_Y f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int_Y \left(\int_X f(x, y) d\mu(x) \right) d\nu(y) = \int_{X \times Y} f d(\mu \times \nu).$$

Απόδειξη Αν η f είναι απλή, δείξαμε στην Παρατήρηση 4.9 ότι η ϕ_f είναι \mathcal{A} -μετρήσιμη και ότι $\int_X \phi_f d\mu = \int f d\pi$.

Στη γενική περίπτωση, θεωρούμε μια αύξουσα ακολουθία (f_n) από $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ -μετρήσιμες συναρτήσεις ώστε $f_n \nearrow f$ κατά σημείο. Από το Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης στον $X \times Y$ έχουμε

$$\int_{X \times Y} f_n d\pi \nearrow \int_{X \times Y} f d\pi. \quad (2)$$

³ Δεν είναι εν γένει απλή. Πάρε για παράδειγμα την $f = \chi_E$ όπου $E \subseteq [0, 1] \times [0, 1]$ το σύνολο Borel $E = \{(x, y) : x \leq y\}$ και υπολόγισε την ϕ_f (μέτρο Lebesgue).

Όμως, αν $\phi_n(x) = \int_Y f_n(x, y) d\nu(y)$ τότε κάθε ϕ_n είναι \mathcal{A} -μετρήσιμη. Επίσης, για κάθε $x \in X$, επειδή $(f_n)_x(y) \nearrow f_x(y)$ για κάθε $y \in Y$, από το Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης στον Y έχουμε

$$\phi_n(x) = \int_Y (f_n)_x(y) d\nu(y) \nearrow \int_Y f_x(y) d\nu(y) \equiv \phi_f(x) \quad \text{για κάθε } x \in X.$$

Άφου η ϕ_f είναι κατά σημείο όριο μετρησίμων, είναι \mathcal{A} -μετρήσιμη και (από το Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης στον X) έπεται ότι

$$\int_X \phi_n d\mu \nearrow \int_X \phi_f d\mu.$$

Όμως κάθε f_n είναι απλή, άρα (από την Παρατήρηση 4.9)

$$\int_X \phi_n d\mu = \int_X \left(\int_Y f_n(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int_{X \times Y} f_n d\pi.$$

Έχουμε λοιπόν

$$\int_X \phi_f d\mu = \lim_n \int_{X \times Y} f_n d\pi. \quad (3)$$

Από τις (2) και (3) έπεται ότι

$$\int_{X \times Y} f d\pi = \int_X \phi_f d\mu = \int_X \left(\int_Y f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x)$$

και η άλλη ισότητα προκύπτει με τον ίδιο τρόπο. \square

Παράδειγμα 4.11 Το συμπέρασμα δεν ισχύει πάντα όταν δεν είναι και οι δύο χώροι σ-πεπερασμένου μέτρου. Για παράδειγμα, έστω $X = Y = [0, 1]$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ τα σύνολα Borel, μ το μέτρο Lebesgue και ν το μέτρο απαρίθμησης. Αν $D = \{(x, x) : x \in [0, 1]\}$, τότε τα τρία ολοκληρώματα $\int_Y (\int_X \chi_D d\mu) d\nu = 0$, $\int_X (\int_Y \chi_D d\nu) d\mu = 1$ και $\int_{X \times Y} \chi_D d(\mu \times \nu) = +\infty$ είναι διαφορετικά ανά δύο.

Ας δείξουμε ότι $\int_{X \times Y} \chi_D d(\mu \times \nu) = +\infty$, δηλαδή ότι $\pi(D) = (\mu \times \nu)(D) = +\infty$. Αφού το D είναι $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ -μετρήσιμο, το μέτρο του ισούται με το εξωτερικό του μέτρο, δηλαδή

$$\pi(D) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \pi(A_i \times B_i) : A_i \in \mathcal{A}, B_i \in \mathcal{B}, D \subseteq \bigcup_i A_i \times B_i \right\}.$$

Θεωρούμε μια τυχαία αριθμήσιμη κάλυψη $D \subseteq \bigcup_i A_i \times B_i$. Για κάθε $x \in [0, 1]$ υπάρχει $i \in \mathbb{N}$ ώστε $(x, x) \in A_i \times B_i$, οπότε $x \in A_i \cap B_i \equiv C_i$. Έχουμε λοιπόν $[0, 1] = \bigcup_i C_i$, άρα κάποιο C_j θα έχει θετικό μέτρο Lebesgue: $\mu(C_j) > 0$. Τότε όμως το C_j είναι άπειρο, οπότε $\nu(C_j) = +\infty$. Συνεπώς $\pi(A_j \times B_j) \geq \pi(C_j \times C_j) = \mu(C_j)\nu(C_j) = +\infty$ και άρα $\sum_{i=1}^{\infty} \pi(A_i \times B_i) = +\infty$. Αφού η κάλυψη είναι τυχαία, έπεται ότι $\pi(D) = +\infty$.

Παράδειγμα 4.12 Η υπόθεση $f \geq 0$ δεν μπορεί εν γένει να παραλειφθεί. Για παράδειγμα, αν $(X, \mathcal{A}, \mu) = (Y, \mathcal{B}, \nu) = (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$ (μ το μέτρο απαρίθμησης) και

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & x = y \\ -1, & x = y + 1 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

τότε $\int_Y (\int_X f d\mu) d\nu = 0$ ενώ $\int_X (\int_Y f d\nu) d\mu = 1$.

Παρατηρούμε εδώ ότι $\int_{X \times Y} |f| d(\mu \times \nu) = +\infty$.

Θεώρημα 4.13 (Fubini) Έστω $f \in \mathcal{L}^1(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mu \times \nu)$ όπου οι (X, \mathcal{A}, μ) και (Y, \mathcal{B}, ν) είναι χώροι σ -πεπερασμένου μέτρου. Τότε

(α) σχεδόν όλες οι τομές της f είναι ολοκληρώσιμες, δηλαδή μ -σχεδόν για κάθε $x \in X$ ισχύει ότι $\int_Y |f(x, y)| d\nu(y) < +\infty$ και ν -σχεδόν για κάθε $y \in Y$ ισχύει ότι $\int_X |f(x, y)| d\mu(x) < +\infty$

(β) οι (σχεδόν παντού ορισμένες) συναρτήσεις

$$x \rightarrow \int_Y f(x, y) d\nu(y) \quad \text{και} \quad y \rightarrow \int_X f(x, y) d\mu(x)$$

ορίζουν στοιχεία⁴ του $L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ (αντιστοίχως $L^1(Y, \mathcal{B}, \nu)$) και

(γ) ισχύουν οι ισότητες

$$\int_X \left(\int_Y f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int_{X \times Y} f d(\mu \times \nu) = \int_Y \left(\int_X f(x, y) d\mu(x) \right) d\nu(y).$$

Απόδειξη Θα αποδείξουμε το Θεώρημα για την περίπτωση $f(X) \subseteq [-\infty, +\infty]$. Η περίπτωση $f(X) \subseteq \mathbb{C}$ έπεται εύκολα.

Από το Θεώρημα Tonelli η συνάρτηση $\phi_{|f|} : X \rightarrow [0, +\infty]$ με $\phi_{|f|}(x) = \int_Y |f(x, y)| d\nu(y)$ είναι \mathcal{A} -μετρήσιμη και

$$\int_X \phi_{|f|}(x) d\mu(x) = \int_X \left(\int_Y |f(x, y)| d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int_{X \times Y} |f| d\pi < +\infty.$$

Επομένως το σύνολο

$$A = \{x \in X : \phi_{|f|}(x) < \infty\}$$

ανήκει στην \mathcal{A} και $\mu(A^c) = 0$. Με άλλα λόγια

$$\mu\text{-σχεδόν για κάθε } x \in X, \quad \int_Y |f_x(y)| d\nu(y) < +\infty, \quad \text{δηλ. } f_x \in \mathcal{L}^1(\nu).$$

Για τον ίδιο λόγο υπάρχει $B \in \mathcal{B}$ με $\nu(B^c) = 0$ ώστε για κάθε $y \in B$ να ισχύει $f^y \in \mathcal{L}^1(\mu)$ και το (α) αποδείχθηκε.

Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Tonelli στην $f_+ = \max\{f, 0\}$: έπεται ότι η συνάρτηση $\phi_+ : X \rightarrow [0, +\infty]$ με $\phi_+(x) = \int_Y f_+(x, y) d\nu(y)$ είναι \mathcal{A} -μετρήσιμη και ότι

$$\int_X \phi_+ d\mu = \int_X \left(\int_Y (f_+)_x(y) d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int_{X \times Y} f_+ d(\mu \times \nu) \leq \int_{X \times Y} |f| d(\mu \times \nu) < \infty,$$

δηλαδή $\phi_+ \in \mathcal{L}^1(\mu)$. Ομοίως η συνάρτηση $\phi_-(x) = \int_Y f_-(x, y) d\nu(y)$ ανήκει στον $\mathcal{L}^1(\mu)$ και

$$\begin{aligned} \int_X \phi_+ d\mu &= \int_{X \times Y} f_+ d(\mu \times \nu) < \infty, & \int_X \phi_- d\mu &= \int_{X \times Y} f_- d(\mu \times \nu) < \infty \\ \text{άρα } \int_X \phi_+ d\mu - \int_X \phi_- d\mu &= \int_{X \times Y} f d(\mu \times \nu). \end{aligned} \quad (4)$$

Όμως, αν $x \in A$ οπότε $f_x \in \mathcal{L}^1(\nu)$ και άρα $(f_\pm)_x \in \mathcal{L}^1(\nu)$, έχουμε

$$\int_Y f_x(y) d\nu(y) = \int_Y (f_+)_x(y) d\nu(y) - \int_Y (f_-)_x(y) d\nu(y) = \phi_+(x) - \phi_-(x) \in \mathbb{R}.$$

⁴δηλαδή π.χ. η πρώτη συνάρτηση είναι μ -ισοδύναμη με μία $g \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu)$

Δηλαδή η συνάρτηση

$$x \rightarrow \int_Y f(x, y) d\nu(y)$$

είναι μ -σχεδόν παντού ορισμένη και ίση με τη διαφορά δύο στοιχείων του $L^1(\mu)$, άρα ορίζει στοιχείο του $L^1(\mu)$. Ακριβέστερα, αν θέσουμε

$$g(x) = \phi_+(x)\chi_A(x) - \phi_-(x)\chi_A(x) \quad (x \in X) \quad (5)$$

τότε η g είναι (παντού) διαφορά δύο συναρτήσεων του $\mathcal{L}^1(\mu)$ με τιμές στο \mathbb{R} , άρα ανήκει στον $\mathcal{L}^1(\mu)$ και ικανοποιεί

$$g(x) = \int_Y f(x, y) d\nu(y) \quad \text{για κάθε } x \in A$$

δηλαδή μ -σχεδόν παντού.

Από την (5) και τη γραμμικότητα του ολοκληρώματος στον $\mathcal{L}^1(\mu)$ έχουμε λοιπόν

$$\begin{aligned} \int_X \left(\int_Y f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x) &= \int_X g(x) d\mu(x) \\ &= \int_X \phi_+(x) d\mu(x) - \int_X \phi_-(x) d\mu(x) \stackrel{(4)}{=} \int_{X \times Y} f(x, y) d\pi(x, y). \end{aligned}$$

Ομοίως η (ν -σχεδόν παντού ορισμένη) συνάρτηση

$$y \rightarrow \int_X f(x, y) d\mu(x)$$

ορίζει στοιχείο του $L^1(\nu)$ και προκύπτει ότι

$$\int_Y \left(\int_X f(x, y) d\mu(x) \right) d\nu(y) = \int_{X \times Y} f(x, y) d\pi(x, y).$$

□

Παρατήρηση 4.14 Τα Θεωρήματα Tonelli και Fubini συνήθως χρησιμοποιούνται σε συνδυασμό: αν δοθεί μια $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ -μετρήσιμη συνάρτηση f , παρατηρούμε ότι από το Θεώρημα Tonelli οι σχέσεις

$$\begin{aligned} (i) \quad & \int_X \left(\int_Y |f(x, y)| d\nu(y) \right) d\mu(x) < \infty \\ (ii) \quad & \int_Y \left(\int_X |f(x, y)| d\mu(x) \right) d\nu(y) < \infty \\ \text{και } (iii) \quad & \int_{X \times Y} |f(x, y)| d\pi(x, y) < \infty \quad (\text{όπου } \pi = \mu \times \nu) \end{aligned}$$

είναι ισοδύναμες. Ελέγχουμε λοιπόν αν κάποιο από τα διαδοχικά ολοκληρώματα στο (i) ή στο (ii) δίνει πεπερασμένο αποτέλεσμα, οπότε έχουμε ότι $f \in \mathcal{L}^1(X \times Y, \mathcal{A} \times \mathcal{B}, \pi)$, και αν αυτό ισχύει, τότε εφαρμόζοντας το Θεώρημα Fubini συμπεραίνουμε ότι το «διπλό» ολοκλήρωμα $\int_{X \times Y} f d\pi$ υπάρχει και ισούται με οποιοδήποτε από τα τα διαδοχικά ολοκληρώματα $\int_Y \left(\int_X f(x, y) d\mu(x) \right) d\nu(y)$ και $\int_X \left(\int_Y f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x)$.