Μεταπτυχιακή Ανάλυση I: Ασκήσεις 5

(Προαιρετικές)

1. Αν $(X,\mathcal{S},\mu)$ είναι χώρος μέτρου, $f\in\mathcal{L}^1(X,\mu)$ και $\nu(E)=\int_E f d\mu$, τότε $\nu_+(E)=\int_E f_+ d\mu$ και $\nu_-(E)=\int_E f_- d\mu$ (επομένως $|\nu|(E)=\int_E |f| d\mu$).

2. Αν ν είναι προσημασμένο μέτρο στον $(X,\mathcal{S})$ και $E\in\mathcal{S}$, τότε

$$|\nu|(E)=\sup\{\sum_{k=1}^n |\nu(E_k)| : E_k\in\mathcal{S} \text{ ξένα}, \ \bigcup_{k=1}^n E_k = E\}$$

και το $|\nu|$ είναι το μικρότερο θετικό μέτρο μ στον $(X,\mathcal{S})$ με την ιδιότητα $\mu(E)\geq|\nu(E)|$ για κάθε $E\in\mathcal{S}$.

3. Αν ν,μ είναι προσημασμένα μέτρα στον $(X,\mathcal{S})$, τότε
(α) Ένα σύνολο $E\in\mathcal{S}$ είναι ν-μηδενικό αν και μόνον αν $|\nu|(E)=0$.
(β) $\quad \nu\perp\mu \Leftrightarrow |\nu|\perp\mu \Leftrightarrow (\nu_+\perp\mu$ και $\nu_-\perp\mu)$.

4. Έστω μ θετικό μέτρο και ν προσημασμένο μέτρο στον μετρήσιμο χώρο $(X,\mathcal{S})$. Δείξτε ότι:
(1) Αν $\nu\ll\mu$ τότε κάθε $E\in\mathcal{S}$ με $\mu(E)=0$ είναι ν-μηδενικό.
(2) Αν κάθε $E\in\mathcal{S}$ με $\mu(E)=0$ είναι ν-μηδενικό τότε $\nu_+\ll\mu$ και $\nu_-\ll\mu$.
(3) Αν $\nu_+\ll\mu$ και $\nu_-\ll\mu$ τότε $|\nu|\ll\mu$.
(4) Αν $|\nu|\ll\mu$ τότε $\nu\ll\mu$.
Επομένως όλες οι συνθήκες είναι ισοδύναμες.

5. Αν μ, ν είναι δύο σ-πεπερασμένα (θετικά) μέτρα στον $(X,\mathcal{M})$, δείξτε ότι τα εξής είναι ισοδύναμα:
(1) $\nu\ll\mu$ και $\mu\ll\nu$.
(2) Τα μ και ν έχουν τα ίδια σύνολα μηδενικού μέτρου.
(3) Υπάρχει $g:X\to\mathbb{R}$ μετρήσιμη με $0<g(x)<\infty$ για κάθε $x\in X$, τέτοια ώστε $\nu(A)=\int_A g d\mu$ για κάθε $A\in\mathcal{M}$.

6. Έστω μ ένα σ-πεπερασμένο (θετικό) μέτρο στον $(X,\mathcal{M})$. Δείξτε ότι υπάρχει πεπερασμένο μέτρο ν στον $(X,\mathcal{M})$ τέτοιο ώστε $\nu\ll\mu$ και $\mu\ll\nu$.

7. Έστω μ,ν δύο μέτρα στον $(X,\mathcal{M})$ με $\nu\ll\mu$. Ορίζουμε $\lambda=\mu+\nu$. Αν $f=d\nu/d\lambda$, δείξτε ότι $0\leq f<1$ σχεδόν παντού ως προς το μ, και $\dfrac{d\nu}{d\mu}=\dfrac{f}{1-f}$.

8. Έστω $(X,\mathcal{M},\mu)$ ένας χώρος σ-πεπερασμένου μέτρου, $\mathcal{N}$ μια υπο-σ-άλγεβρα της $\mathcal{M}$, και $\nu=\mu|_{\mathcal{N}}$. Δείξτε ότι αν $f\in L^1(\mu)$, τότε υπάρχει $g\in L^1(\nu)$ τέτοια ώστε $\int_E f d\mu=\int_E g d\nu$ για κάθε $E\in\mathcal{N}$. Δείξτε επίσης ότι αν g' είναι μια άλλη τέτοια συνάρτηση, τότε $g'=g$ σχεδόν παντού ως προς το ν. (Η g είναι η «δεσμευμένη μέση τιμή» της f στην $\mathcal{N}$.)

9. (1) Στον μετρήσιμο χώρο $([0,1],\mathcal{M}_m)$ όπου $\mathcal{M}_m$ τα Lebesgue μετρήσιμα σύνολα, θεωρούμε τα εξής δύο μέτρα: m, το μέτρο Lebesgue και ν, το μέτρο απαρίθμησης. Το μέτρο ν δεν δέχεται ανάλυση Lebesgue ως προς το μέτρο m. Επίσης, ενώ το μέτρο m είναι προφανώς απολύτως συνεχές ως προς το ν, δεν υπάρχει $f\in L^1([0,1],\nu)$ ώστε $m(E)=\int_E f d\nu$ για κάθε $E\in\mathcal{M}_m$.

(2) Στον $(\mathbb{R},\mathcal{M})$, όπου $\mathcal{M}=\{E\subseteq\mathbb{R} : E$ αριθμήσιμο ή E^c αριθμήσιμο$\}$ ονομάζουμε μ το μέτρο απαρίθμησης και ν το μέτρο που ορίζεται από τις σχέσεις $\nu(E)=0$ αν E αριθμήσιμο και $\nu(E)=1$ αν E υπεραριθμήσιμο. Τότε προφανώς $\nu\ll\mu$ αλλά δεν υπάρχει μετρήσιμη f ώστε $\nu(E)=\int_E f d\mu$ για κάθε $E\in\mathcal{M}$.

10. Έστω $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Δείξτε ότι υπάρχει σταθερά $M>0$ τέτοια ώστε $|F(x)-F(y)|\leq M|x-y|$ για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$ αν και μόνο αν η F είναι απολύτως συνεχής και $|F'|\leq M$ σχεδόν παντού.

11. Έστω $\{F_j\}$ μια ακολουθία μη αρνητικών αυξουσών συναρτήσεων στο $[a,b]$, με την ιδιότητα $F(x)=\sum_1^\infty F_j(x)<\infty$ για κάθε $x\in[a,b]$. Δείξτε ότι $F'(x)=\sum_1^\infty F_j'(x)$ σχεδόν παντού στο $[a,b]$.