11 Νοεμβρίου 2007

Μεταπτυχιακή Ανάλυση Ι: Ασκήσεις 2

(Παράδοση: 21 Νοεμβρίου 2007)

1. Έστω $(X, \mathcal{M}, \mu)$ χώρος μέτρου και (E_j) μια ακολουθία στην $\mathcal{M}$ με την ιδιότητα $\sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j) < \infty$. Δείξτε ότι $\mu\big(\limsup_j E_j\big) = 0$.

2. Έστω μ^* το εξωτερικό μέτρο που επάγεται στο X από ένα **πεπερασμένο** προμέτρο μ_0. Για κάθε $E \subseteq X$ ορίζουμε το εσωτερικό μέτρο $\mu_*(E)$ του E από τη σχέση

$$\mu_*(E) = \mu_0(X) - \mu^*(E^c).$$

Δείξτε ότι το E είναι μ^*-μετρήσιμο αν και μόνο αν $\mu^*(E) = \mu_*(E)$.

3. Έστω μ ένα πεπερασμένο μέτρο στο μετρήσιμο χώρο $(X, \mathcal{M})$ και έστω μ^* το εξωτερικό μέτρο που επάγεται από το μ στο $\mathcal{P}(X)$. Υποθέτουμε ότι $\mu^*(E) = \mu^*(X)$ για κάποιο $E \subseteq X$ (αυτό δεν σημαίνει αναγκαστικά ότι $E \in \mathcal{M}$).

(α) Δείξτε ότι αν $A, B \in \mathcal{M}$ και $A \cap E = B \cap E$, τότε $\mu(A) = \mu(B)$.

(β) Θέτουμε $\mathcal{M}_E = \{A \cap E : A \in \mathcal{M}\}$, και ορίζουμε $\nu : \mathcal{M}_E \to [0, \infty]$ με $\nu(A \cap E) = \mu(A)$. Δείξτε ότι η $\mathcal{M}_E$ είναι σ-άλγεβρα στο E και ότι το ν είναι (καλά ορισμένο) μέτρο στην $\mathcal{M}_E$.

4. Έστω $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ αύξουσα και δεξιά συνεχής συνάρτηση. Αν μ_F είναι το αντίστοιχο μέτρο Borel, δείξτε ότι: για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$, $\mu_F(\{a\}) = F(a) - F(a-)$, $\mu_F([a, b)) = F(b-) - F(a-)$, $\mu_F([a, b]) = F(b) - F(a-)$, και $\mu_F((a, b)) = F(b-) - F(a)$.

5. Έστω $E \subseteq \mathbb{R}$ Lebesgue μετρήσιμο σύνολο με $m(E) > 0$. Δείξτε ότι για κάθε $\alpha \in (0, 1)$ υπάρχει ανοιχτό διάστημα I τέτοιο ώστε $m(E \cap I) > \alpha m(I)$.

6. Έστω $E \subseteq \mathbb{R}$ Lebesgue μετρήσιμο σύνολο με $m(E) > 0$. Δείξτε ότι το σύνολο $E - E := \{x - y : x, y \in E\}$ περιέχει ένα διάστημα με κέντρο το 0. [*Προαιρετική υπόδειξη:* Από την προηγούμενη άσκηση, υπάρχει ανοιχτό διάστημα I τέτοιο ώστε $m(E \cap I) > 3m(I)/4$.]

7. Αν $\mathcal{E} = \{(a, +\infty] : a \in \mathbb{R}\}$, δείξτε ότι $\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}} = \mathcal{M}(\mathcal{E})$.

8. Έστω $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ και $Y = f^{-1}(\mathbb{R})$. Δείξτε ότι η f είναι μετρήσιμη αν και μόνο αν $f^{-1}(\{-\infty\}) \in \mathcal{M}$, $f^{-1}(\{\infty\}) \in \mathcal{M}$, και η f είναι μετρήσιμη στο Y.

9. Αν $f, g : X \to \mathbb{R}$ είναι συναρτήσεις στον μετρήσιμο χώρο $(X, \mathcal{M})$, δείξτε ότι η $f + ig : X \to \mathbb{C}$ είναι μετρήσιμη αν και μόνον αν οι f και g είναι μετρήσιμες.

10. Έστω (f_n) μια ακολουθία πραγματικών ή μιγαδικών μετρήσιμων συναρτήσεων στον $(X, \mathcal{M})$. Δείξτε ότι το σύνολο $\{x \in X : \text{ υπάρχει το } \lim_n f_n(x)\}$ είναι μετρήσιμο.

11. Έστω $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$. Αν $f^{-1}((r, \infty]) \in \mathcal{M}$ για κάθε $r \in \mathbb{Q}$, δείξτε ότι η f είναι μετρήσιμη.

12. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ αύξουσα συνάρτηση. Δείξτε ότι η f είναι Borel μετρήσιμη.

Να επιλέξετε τουλάχιστον 7 από τις ασκήσεις