ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ Ι, ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2013 Α

Θέμα 1. 18 θεατές άφησαν τα 36 διακεκριμένα παπούτσια τους (ένα δεξιό κι ένα αριστερό ο καθένας) στον προθάλαμο του θεάτρου. Κλέφτης, στα σκοτεινά, άρπαξε 12 παπούτσια και τα έβαλε σε ένα σακί. Με πόσους τρόπους γίνεται η κλοπή (δηλαδή πόσες διαφορετικές συνθέσεις σακιών είναι δυνατές) σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

(α) Αν το σακί περιέχει ακριβώς 3 δεξιά παπούτσια.
(β) Αν το σακί δεν περιέχει παπούτσια του ίδιου θεατή.
(γ) Αν το σακί περιέχει ακριβώς 3 δεξιά παπούτσια και δεν περιέχει παπούτσια του ίδιου θεατή.
(δ) Αν το σακί περιέχει τουλάχιστον ένα δεξί και τουλάχιστον ένα αριστερό παπούτσι.
(ε) Αν το σακί περιέχει είτε και τα δυο είτε κανένα παπούτσι από κάθε ζευγάρι παπουτσιών θεατή.

Θέμα 2. (α) Να υπολογίσετε το πλήθος των μη αρνητικών ακεραίων λύσεων του συστήματος εξισώσεων

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 10, \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - x_5 &= 4. \end{aligned}$$

(β) Να υπολογίσετε το πλήθος των μη αρνητικών ακεραίων λύσεων της εξίσωσης $(x_1 + x_2 + x_3) \cdot (x_4 + x_5) = 21$.

Θέμα 3. (α) Έστω $\Sigma(\nu, \kappa)$ το πλήθος των επαναληπτικών συνδυασμών των ν ($\nu \geq 3$) στοιχείων του $\Omega = \{1, 2, \ldots, \nu\}$ ανά κ, όπου τα στοιχεία $1, 2$ πρέπει να εμφανίζονται τουλάχιστον μία φορά το καθένα, ενώ τα στοιχεία $3, 4, \ldots, \nu$ επιτρέπεται να εμφανίζονται όσες φορές θέλουν. Να υπολογίσετε την συνήθη γεννήτρια, $A(t) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \Sigma(\nu, \kappa) t^{\kappa}$, καθώς και τον αριθμό $\Sigma(\nu, \kappa)$.

(β) Έστω $\Delta(\nu, \kappa)$ το πλήθος των επαναληπτικών διατάξεων των ν ($\nu \geq 3$) στοιχείων του $\Omega = \{1, 2, \ldots, \nu\}$ ανά κ, όπου τα στοιχεία $1, 2$ πρέπει να εμφανίζονται τουλάχιστον μία φορά το καθένα, ενώ τα στοιχεία $3, 4, \ldots, \nu$ επιτρέπεται να εμφανίζονται όσες φορές θέλουν. Να υπολογίσετε την εκθετική γεννήτρια, $E(t) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \Delta(\nu, \kappa) \frac{t^{\kappa}}{\kappa!}$, καθώς και τον αριθμό $\Delta(\nu, \kappa)$.

ΔΙΑΡΚΕΙΑ 2 ΩΡΕΣ. ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!

Απαντήσεις Θεμάτων Συνδυαστικής Ι εξ αναβολής Σεπτ. 2013

Ομάδα Θεμάτων Α.

Θέμα 1ο

(α) Πολλαπλασιαστική αρχή:

$$\binom{18}{3}\binom{18}{9}$$

$\binom{18}{3}$: # επιλογών δεξιών παπουτσιών στο σακί

$\binom{18}{9}$: # επιλογών αριστερών παπουτσιών στο σακί

(β) Πολλαπλασιαστική αρχή:

$$\binom{18}{12}\cdot 2^{12}$$

$\binom{18}{12}$: # επιλογών θέσεων με 1 παπούτσι στο σακί

2^{12}: δεξί ή αριστερό για τον 1ο, 2ο, ..., 12ο

(γ) Όπως το (α):

$$\binom{18}{3}\binom{15}{9}$$

15: Αφαιρούνται από τις δυνατές επιλογές τα αριστερά παπούτσια που το αντίστοιχο δεξί τους επιλέγει για το σακί

(δ) Αρχή εγκλεισμού - αποκλεισμού:

Ω: Σύνολο επιλογών, A: Σύνολο επιλογών χωρίς δεξί παπ., B: ... χωρίς αριστ.

$$N(A'B') = N(\Omega) - N(A) - N(B) + N(AB) = \binom{36}{12} - \binom{18}{12} - \binom{18}{12} + 0$$
$$= \binom{36}{12} - 2\binom{18}{12}.$$

(ε) Αρκεί να διαλέξω 6 θέσεις των οποίων θα μπουν και τα δύο παπούτσια.
$\binom{18}{6}$.

Θέμα 2ο:

(α)
$$\left\{\begin{array}{l} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=10 \\ x_1+x_2+x_3-x_4-x_5=4 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1+x_2+x_3=7 \\ x_4+x_5=3 \end{array}\right\}$$

Πολλαπλασιαστική αρχή: # λύσεων $= \begin{bmatrix}3\\7\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$

(β) $(x_1+x_2+x_3)(x_4+x_5)=21$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1+x_2+x_3=1 \\ x_4+x_5=21 \end{array}\right\} \text{ ή } \left\{\begin{array}{l} x_1+x_2+x_3=3 \\ x_4+x_5=7 \end{array}\right\} \text{ ή } \left\{\begin{array}{l} x_1+x_2+x_3=7 \\ x_4+x_5=3 \end{array}\right\} \text{ ή } \left\{\begin{array}{l} x_1+x_2+x_3=21 \\ x_4+x_5=1 \end{array}\right\}$$

Αρχή αθροίσματος + Πολλαπλασιαστική αρχή:

$$\#\text{λύσεων} = \begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\21\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}3\\3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\7\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}3\\7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}3\\21\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}.$$

Θέμα 3ο:

(α) $A(t) = (t+t^2+\dots)^2(1+t+t^2+\dots)^{v-2} = \left(\frac{t}{1-t}\right)^2\left(\frac{1}{1-t}\right)^{v-2}$

$= t^2(1-t)^{-v}$

$\sum_{k=0}^{\infty} \Sigma(v,k)t^k = A(t) = t^2(1-t)^{-v} = t^2\sum_{j=0}^{\infty}\left[{v \atop j}\right]t^j = \sum_{j=0}^{\infty}\left[{v \atop j}\right]t^{j+2}$

$= \sum_{k=2}^{\infty}\left[{v \atop k-2}\right]t^k$

Άρα

$$\Sigma(v,k) = \begin{cases} 0, & k=0,1 \\ \left[{v \atop k-2}\right], & k=2,3,\dots \end{cases}$$

(β) $E(t) = \left(\frac{t}{1!}+\frac{t^2}{2!}+\dots\right)^2\left(\frac{t^0}{0!}+\frac{t^1}{1!}+\frac{t^2}{2!}+\dots\right)^{v-2} = (e^t-1)^2(e^t)^{v-2}$

$= (e^{2t}-2e^t+1)\,e^{(v-2)t} = e^{vt}-2e^{(v-1)t}+e^{(v-2)t}$

$\sum_{k=0}^{\infty}\Delta(v,k)\frac{t^k}{k!} = E(t) = e^{vt}-2e^{(v-1)t}+e^{(v-2)t}$

$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(vt)^k}{k!} - 2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{((v-1)t)^k}{k!} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{((v-2)t)^k}{k!}$

$= \sum_{k=0}^{\infty}\left(v^k-2(v-1)^k+(v-2)^k\right)\frac{t^k}{k!}$

Άρα

$\Delta(v,k) = v^k-2(v-1)^k+(v-2)^k, \quad k=0,1,\dots$