ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ Ι, ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2012 **B**

Θέμα 1. Βρείτε με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να μπουν οι αριθμοί $1, 2, \ldots, 14$ σε μία σειρά, σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:
(α) Αν το 4 πρέπει να βρίσκεται πριν το 8.
(β) Αν το 4 πρέπει να βρίσκεται πριν το 8 και το 8 πριν το 12.
(γ) Αν το 4 πρέπει να βρίσκεται πριν το 12 και το 8 πριν το 12.
(δ) Αν οι 7 πρώτες θέσεις καταλαμβάνονται από άρτιους αριθμούς.
(ε) Αν στις 3 πρώτες θέσεις δεν υπάρχουν περιττοί αριθμοί.

Θέμα 2. (α) Να υπολογιστεί το άθροισμα $\displaystyle\sum_{j=0}^{\nu} j^2 \binom{\nu}{j+1} 5^j$.
(β) Να βρείτε το πλήθος των μη αρνητικών ακεραίων λύσεων $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ του συστήματος εξισώσεων

$$(\Sigma): \quad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7, \quad x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 11.$$

Θέμα 3. Διαθέτουμε 4 σύμβολα Α, 4 σύμβολα Β και 4 σύμβολα Γ.
(α) Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούμε να βάλουμε τα 12 αυτά σύμβολα σε μία σειρά;
(β) Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούμε να βάλουμε τα 12 αυτά σύμβολα σε μία σειρά έτσι ώστε τα 4 σύμβολα Α να είναι συνεχόμενα;
(γ) Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούμε να βάλουμε τα 12 αυτά σύμβολα σε μία σειρά έτσι ώστε να μην υπάρχουν 4 όμοια σύμβολα συνεχόμενα στη σειρά;

Θέμα 4. Έστω α_κ το πλήθος των επαναληπτικών συνδυασμών των $\nu+1$ στοιχείων του $\Omega = \{\omega_0, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\nu\}$ ανά κ, όπου το ω_0 επιτρέπεται να εμφανίζεται δύο ή τρεις φορές στο συνδυασμό, το ω_ν επιτρέπεται να εμφανίζεται περιττό αριθμό φορών, ενώ για τα υπόλοιπα $\nu - 1$ στοιχεία του Ω, $\omega_1, \ldots, \omega_{\nu-1}$, δεν υπάρχει περιορισμός. Υπολογίστε
(α) τη συνήθη γεννήτρια, $A(t) = \displaystyle\sum_{\kappa=0}^{\infty} \alpha_\kappa t^\kappa$ και
(β) τον αριθμό α_κ.

ΔΙΑΡΚΕΙΑ 2 ΩΡΕΣ. ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!

Συνδυαστική Ι, Σεπτέμβριος 2012

Ομάδα Θεμάτων Β – Λύσεις

Θέμα 1ο:

α) Οι μεταθέσεις του $\{1,2,\dots,14\}$ που το 4 βρίσκεται πριν το 8 βρίσκονται σε μία 1-1 αντιστοιχία με τις μεταθέσεις που το 8 βρίσκεται πριν το 4 (η αντιμετάθεση των στοιχείων 4 και 8 δίνει αυτή την 1-1 αντιστοιχία). Συνεπώς, το πλήθος των μεταθέσεων του $\{1,2,\dots,14\}$ που το 4 βρίσκεται πριν το 8 ισούται με το $1/2$ του συνολικού πλήθους των μεταθέσεων του $\{1,2,\dots,14\}$, είναι δηλαδή $14!/2$.

Εναλλακτικά, μπορούμε να σκεφθούμε ότι μια μετάθεση του $\{1,2,\dots,14\}$ που το 4 βρίσκεται πριν το 8 δημιουργείται σε 2 στάδια:

1ο στάδιο: Επιλογή 2 από τις 14 θέσεις για να μπουν τα 4, 8 (με αυτή τη σειρά) $\rightarrow \binom{14}{2}$ τρόποι

2ο στάδιο: Τοποθέτηση των υπολοίπων 12 στοιχείων σε σειρά στις υπόλοιπες θέσεις $\rightarrow$ 12! τρόποι

Από την πολλ/κή αρχή υπάρχουν $\binom{14}{2}\cdot 12! = \frac{14!}{2!\,\cancel{12!}}\cancel{12!} = \frac{14!}{2}$ διαφορετικές μεταθέσεις αυτού του τύπου.

β) Ομοίως με το α), λόγω συμμετρίας, το πλήθος των μεταθέσεων που τα 4, 8, 12 βρίσκονται μέσα στη μετάθεση με το 4 πριν το 8 που είναι πριν το 12 ισούται με το πλήθος των μεταθέσεων που το 4 είναι πριν το 12 που είναι πριν το 8 κ.ο.κ. Δεδομένου ότι η διάταξη των 4, 8, 12 μέσα σε μια μετάθεση του $\{1,2,\dots,14\}$ γίνεται με $3! = 6$ τρόπους (4-8-12, 4-12-8, 8-4-12, 8-12-4, 12-4-8, 12-8-4) το πλήθος των μεταθέσεων του $\{1,2,\dots,14\}$ που το 4 βρίσκεται πριν το 8 που βρίσκεται πριν το 12 ισούται με το $1/6$ του συνολικού πλήθους μεταθέσεων του $\{1,2,\dots,14\}$, είναι δηλαδή

$14!/6$.

Εναλλακτικά, μπορούμε να σκεφθούμε ότι μια μετάθεση του $\{1,2,\dots,14\}$ που το 4 βρίσκεται πριν το 8 που βρίσκεται πριν το 12 δημιουργείται σε 2 στάδια:

1º στάδιο: Επιλογή 3 θέσεων από τις 14 για να μπουν τα 4, 8, 12 σε αύξουσα σειρά $\longrightarrow \binom{14}{3}$ τρόποι

2º στάδιο: Τοποθέτηση των υπολοίπων 11 στοιχείων του $\{1,2,\dots,14\}\setminus\{4,8,12\}$ σε σειρά στις υπόλοιπες θέσεις $\longrightarrow 11!$ τρόποι

Από την πολ/κή αρχή υπάρχουν $\binom{14}{3}11! = \frac{14!}{3!\,\cancel{11!}}\cancel{11!} = \frac{14!}{6}$ διαφορετικές μεταθέσεις αυτού του τύπου.

γ) Ομοίως με τα α), β), λόγω συμμετρίας, το πλήθος των μεταθέσεων που το 12 βρίσκεται δεξιότερα των 4, 8 στη μετάθεση ισούται με το πλήθος των μεταθέσεων που το 8 βρίσκεται δεξιότερα των 4, 12 στη μετάθεση και ισούται με το πλήθος των μεταθέσεων που το 4 βρίσκεται δεξιότερα των 8, 12 στη μετάθεση. Συνεπώς, το πλήθος των ζητούμενων μεταθέσεων θα είναι το $1/3$ του συνολικού πλήθους των μεταθέσεων του $\{1,2,\dots,14\}$, είναι δηλαδή $14!/3$.

Εναλλακτικά, μπορούμε να σκεφθούμε ότι μια μετάθεση του $\{1,2,\dots,14\}$ που τα 4, 8 βρίσκονται πριν το 12 δημιουργείται σε 3 στάδια:

1º στάδιο: Απόφαση για το αν το 4 ή το 8 μπει αριστερότερα στη μετάθεση $\longrightarrow 2$ τρόποι

2º στάδιο: Επιλογή 3 θέσεων από τις 14 για να μπουν τα 4, 8, 12 (το 12 θα μπει στη δεξιότερη επιλεγμένη θέση και τα 4, 8 θα τοποθετηθούν κατά την απόφαση του 1ου σταδίου) $\longrightarrow \binom{14}{3}$ τρόποι

3ο στάδιο: Τοποθέτηση των υπολοίπων 11 στοιχείων σε σειρά $\longrightarrow$ 11! τρόποι

Από την πολ/κή αρχή υπάρχουν $2\binom{14}{3}11! = 2\cdot\frac{14!}{3!\cancel{11!}}\cancel{11!} = \frac{14!}{3}$ διαφορετικές μεταθέσεις αυτού του τύπου.

δ) Μια μετάθεση του $\{1,2,\dots,14\}$ στην οποία στις 7 πρώτες θέσεις υπάρχουν μόνο άρτιοι αριθμοί δημιουργείται σε 2 στάδια:

1ο στάδιο: Τοποθέτηση των 7 αρτίων σε σειρά στις πρώτες 7 θέσεις $\longrightarrow$ 7! τρόποι

2ο στάδιο: Τοποθέτηση των 7 περιττών σε σειρά στις τελευταίες 7 θέσεις $\longrightarrow$ 7! τρόποι

Από την πολ/κή αρχή υπάρχουν $7!\cdot 7! = (7!)^2$ διαφορετικές μεταθέσεις αυτού του τύπου.

ε) Μια μετάθεση στην οποία στις 3 πρώτες θέσεις δεν υπάρχουν περιττοί αριθμοί δημιουργείται σε 2 στάδια:

1ο στάδιο: Επιλογή και τοποθέτηση 3 αρτίων στις 3 πρώτες θέσεις $\longrightarrow (7)_3 = \frac{7!}{4!}$ τρόποι

2ο στάδιο: Τοποθέτηση των υπολοίπων στοιχείων στη σειρά στις 11 τελευταίες θέσεις $\longrightarrow$ 11! τρόποι

Από την πολ/κή αρχή υπάρχουν $\frac{7!\,11!}{4!}$ διαφορετικές μεταθέσεις αυτού του τύπου.

Θέμα 2ο:

α) Είναι

$$S' = \sum_{j=0}^{\nu} j^2\binom{\nu}{j+1}5^j \overset{k=j+1}{=} \sum_{k=1}^{\nu+1}(k-1)^2\binom{\nu}{k}5^{k-1} = \frac{1}{5}\sum_{k=1}^{\nu}(k-1)^2\binom{\nu}{k}5^k$$

$\binom{\nu}{k}=0$ για $k>\nu$

Όμως

$$(k-1)^2\binom{\nu}{k} = (k^2-2k+1)\binom{\nu}{k} = \left(k(k-1)-k+1\right)\binom{\nu}{k}$$

οπότε

$$S' = \frac{1}{5}\left(\sum_{k=1}^{\nu}k(k-1)\binom{\nu}{k}5^k - \sum_{k=1}^{\nu}k\binom{\nu}{k}5^k + \sum_{k=1}^{\nu}\binom{\nu}{k}5^k\right)$$

ιδιότητα $\binom{\nu}{k}=\frac{\nu}{k}\binom{\nu-1}{k-1}$ για $k\neq 0$

$$=\frac{1}{5}\left(\sum_{k=2}^{\nu}k(k-1)\frac{\nu}{k}\cdot\frac{\nu-1}{k-1}\binom{\nu-2}{k-2}5^k-\sum_{k=1}^{\nu}k\frac{\nu}{k}\binom{\nu-1}{k-1}5^k+\sum_{k=1}^{\nu}\binom{\nu}{k}5^k\right)$$

$$=\frac{1}{5}\left(25\nu(\nu-1)\sum_{k=2}^{\nu}\binom{\nu-2}{k-2}5^{k-2}-5\nu\sum_{k=1}^{\nu}\binom{\nu-1}{k-1}5^{k-1}+\sum_{k=1}^{\nu}\binom{\nu}{k}5^k\right)$$

$\ell=k-2$
$m=k-1$

$$=\frac{1}{5}\left(25\nu(\nu-1)\sum_{\ell=0}^{\nu-2}\binom{\nu-2}{\ell}5^{\ell}-5\nu\sum_{m=0}^{\nu-1}\binom{\nu-1}{m}5^m+\sum_{k=1}^{\nu}\binom{\nu}{k}5^k\right)$$

Διωνυμικό Θεωρ.

$$=\frac{1}{5}\left(25\nu(\nu-1)(1+5)^{\nu-2}-5\nu(1+5)^{\nu-1}+(1+5)^{\nu}-\binom{\nu}{0}5^0\right)$$

$$=\frac{25\nu(\nu-1)6^{\nu-2}-5\nu6^{\nu-1}+6^{\nu}-1}{5}$$

β) Κάθε μη-αρνητική ακέραια λύση (x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) του συστήματος (Σ) είναι της μορφής (x_1,x_2,x_3,x_4,x_4+4) με (x_1,x_2,x_3,x_4) να είναι ακέραια μη-αρνητική λύση της $x_1+x_2+x_3+x_4=7$. Πράγματι, αφαιρώντας την 1η από τη 2η εξίσωση του (Σ) έχουμε $x_5-x_4=4$.

Επομένως

μη-αρνητικών ακεραίων λύσεων (x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) του Σ = # μη-αρνητικών ακεραίων λύσεων της $x_1+x_2+x_3+x_4=7$ $=\left[{4 \atop 7}\right]=\binom{4+7-1}{7}=\binom{10}{7}$

Θέμα 3ο:

α) Είναι μεταθέσεις 3 ειδών στοιχείων A, B και Γ που καθένα εμφανίζεται 4 φορές. Το πλήθος τους είναι

$$\frac{(4+4+4)!}{4!\,4!\,4!}=\frac{12!}{(4!)^3}.$$

β) Είναι μεταθέσεις 3 ειδών στοιχείων, των AAAA, B και Γ που το AAAA εμφανίζεται 1 φορά, ενώ τα B και Γ από 4 φορές το καθένα. Το πλήθος τους είναι

$$\frac{(1+4+4)!}{1!\,4!\,4!}=\frac{9!}{(4!)^2}$$

γ) Έστω Ω το σύνολο όλων των μεταθέσεων των 4A, των 4B και των 4Γ.

Ορίζουμε

A_1: το σύνολο των μεταθέσεων στον Ω που τα 4 Α είναι συνεχόμενα

A_2: το σύνολο των μεταθέσεων στον Ω που τα 4 Β είναι συνεχόμενα

A_3: το σύνολο των μεταθέσεων στον Ω που τα 4 Γ είναι συνεχόμενα

Το ζητούμενο πλήθος είναι $N(A_1'A_2'A_3')$ που από την αρχή εγκλεισμού – αποκλεισμού είναι

$$N(A_1'A_2'A_3') = N(\Omega) - N(A_1) - N(A_2) - N(A_3)$$
$$+ N(A_1A_2) + N(A_1A_3) + N(A_2A_3) - N(A_1A_2A_3)$$

Όμως από το α) είναι $N(\Omega) = 12!/(4!)^3$, ενώ από το β) είναι $N(A_1) = 9!/(4!)^2$ και όμοια $N(A_2) = N(A_3) = 9!/(4!)^2$.

Το σύνολο A_1A_2 περιέχει τις μεταθέσεις των 3 Α, των 3 Β και των 3 Γ όπου τα 3 Α είναι συνεχόμενα και τα 3 Β επίσης συνεχόμενα. Αλλά αυτές είναι μεταθέσεις 3 ειδών στοιχείων, των ΑΑΑΑ, ΒΒΒΒ και Γ που τα ΑΑΑΑ και ΒΒΒΒ εμφανίζονται 1 φορά το καθένα, ενώ το Γ 4 φορές. Άρα

$$N(A_1A_2) = \frac{(1+1+4)!}{1!\,1!\,4!} = 6!/4! \text{ και όμοια } N(A_1A_3) = N(A_2A_3) = 6!/4!.$$

Τέλος, το σύνολο $A_1A_2A_3$ περιέχει τις μεταθέσεις των 3 στοιχείων ΑΑΑΑ, ΒΒΒΒ και ΓΓΓΓ που είναι $3!$ το πλήθος.

Τελικά, το ζητούμενο πλήθος τρόπων είναι

$$12!/(4!)^3 - 3\cdot 9!/(4!)^2 + 3\cdot 6!/4! - 3!$$

Θέμα 4ο:

α) Οι απαριθμήτριες των στοιχείων $w_0, w_1, \dots, w_\nu$ είναι

$$A_0(t, x_0) = (tx_0)^2 + (tx_0)^3$$
$$A_j(t, x_j) = (tx_j)^0 + (tx_j)^1 + (tx_j)^2 + \cdots, \quad j = 1, 2, \dots, \nu-1$$
$$A_\nu(t, x_\nu) = (tx_\nu)^1 + (tx_\nu)^3 + (tx_\nu)^5 + \cdots$$

οπότε

$$A_0(t) \equiv A_0(t,1) = t^2 + t^3$$
$$A_j(t) \equiv A_j(t,1) = \frac{1}{1-t}, \quad j = 1, 2, \dots, \nu-1$$
$$A_\nu(t) = A_\nu(t,1) = t^1 + t^3 + t^5 + \cdots = \frac{t}{1-t^2}$$

Η γεννήτρια συνδυασμών είναι

$$A(t) = A_0(t)A_1(t)\cdots A_\nu(t) = t^2(1+t)\left(\frac{1}{1-t}\right)^{\nu-1}\frac{t}{1-t^2} = t^3\,\frac{1}{(1-t)^\nu}$$

b) $\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k = A(t) = t^3 \frac{1}{(1-t)^\nu} = t^3 \sum_{j=0}^{\infty} \left[\begin{matrix} \nu \\ j \end{matrix} \right] t^j$

$= \sum_{j=0}^{\infty} \left[\begin{matrix} \nu \\ j \end{matrix} \right] t^{j+3} = \sum_{k=3}^{\infty} \left[\begin{matrix} \nu \\ k-3 \end{matrix} \right] t^k$

οπότε

$a_k = 0, \quad k = 0, 1, 2$

$a_k = \left[\begin{matrix} \nu \\ k-3 \end{matrix} \right], \quad k = 3, 4, 5, \ldots$