ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ Ι, ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2012 **A**

Θέμα 1. Βρείτε με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να μπουν οι αριθμοί $1, 2, \ldots, 10$ σε μία σειρά, σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:
(α) Αν το 3 πρέπει να βρίσκεται πριν το 5.
(β) Αν το 3 πρέπει να βρίσκεται πριν το 5 και το 5 πριν το 7.
(γ) Αν το 3 πρέπει να βρίσκεται πριν το 7 και το 5 πριν το 7.
(δ) Αν οι 5 πρώτες θέσεις καταλαμβάνονται από περιττούς αριθμούς.
(ε) Αν στις 3 πρώτες θέσεις δεν υπάρχουν άρτιοι αριθμοί.

Θέμα 2. (α) Να υπολογιστεί το άθροισμα $\displaystyle\sum_{\kappa=0}^{\nu}(\kappa+2)^2\binom{\nu}{\kappa+1}2^{\kappa}$.
(β) Να βρείτε το πλήθος των μη αρνητικών ακεραίων λύσεων (x_1, x_2, x_3, x_4) του συστήματος εξισώσεων

$$(\Sigma):\quad x_1+x_2+x_3=8, \quad x_1+x_2+x_4=10.$$

Θέμα 3. Διαθέτουμε τρία σύμβολα Α, τρία σύμβολα Β και τρία σύμβολα Γ.
(α) Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούμε να βάλουμε τα 9 αυτά σύμβολα σε μία σειρά;
(β) Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούμε να βάλουμε τα 9 αυτά σύμβολα σε μία σειρά έτσι ώστε τα τρία σύμβολα Α να είναι συνεχόμενα;
(γ) Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούμε να βάλουμε τα 9 αυτά σύμβολα σε μία σειρά έτσι ώστε να μην υπάρχουν τρία όμοια σύμβολα συνεχόμενα στη σειρά;

Θέμα 4. Έστω α_κ το πλήθος των επαναληπτικών συνδυασμών των $\nu+2$ στοιχείων του $\Omega = \{\omega_0, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\nu, \omega_{\nu+1}\}$ ανά κ, όπου το ω_0 επιτρέπεται να εμφανίζεται περιττό αριθμό φορών στο συνδυασμό, το $\omega_{\nu+1}$ επιτρέπεται να εμφανίζεται μία ή δύο φορές, ενώ για τα υπόλοιπα ν στοιχεία του Ω, $\omega_1, \ldots, \omega_\nu$, δεν υπάρχει περιορισμός. Υπολογίστε
(α) τη συνήθη γεννήτρια, $A(t) = \displaystyle\sum_{\kappa=0}^{\infty}\alpha_\kappa t^\kappa$ και
(β) τον αριθμό α_κ.

ΔΙΑΡΚΕΙΑ 2 ΩΡΕΣ. ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!

Συνδυαστική Ι, Σεπτέμβριος 2012
Ομάδα Θεμάτων Α – Λύσεις

Θέμα 1º:

α) Οι μεταθέσεις του $\{1,2,\dots,10\}$ που το 3 βρίσκεται πριν το 5 βρίσκονται σε μια 1-1 αντιστοιχία με τις μεταθέσεις που το 5 βρίσκεται πριν το 3 (η αντιμετάθεση των στοιχείων 3 και 5 δίνει αυτήν την 1-1 αντιστοιχία). Συνεπώς, το πλήθος των μεταθέσεων του $\{1,2,\dots,10\}$ που το 3 βρίσκεται πριν το 5 ισούται με το $1/2$ του συνολικού πλήθους των μεταθέσεων του $\{1,2,\dots,10\}$, είναι δηλαδή $\frac{10!}{2}$.

Εναλλακτικά μπορούμε να σκεφθούμε ότι μια μετάθεση του $\{1,2,\dots,10\}$ που το 3 βρίσκεται πριν το 5 δημιουργείται σε 2 στάδια:

1º στάδιο: Επιλογή 2 από τις 10 θέσεις για να μπουν τα 3, 5 $\rightarrow \binom{10}{2}$ τρόποι

2º στάδιο: Τοποθέτηση των υπολοίπων 8 στοιχείων $\{1,2,4,6,7,8,9,10\}$ σε σειρά στις υπόλοιπες θέσεις $\rightarrow 8!$ τρόποι

Από την πολ/κή αρχή υπάρχουν $\binom{10}{2}8! = \frac{10!}{2!\cancel{8!}}\cancel{8!} = \frac{10!}{2}$ διαφορετικές μεταθέσεις αυτού του τύπου.

β) Ομοίως με το α), λόγω συμμετρίας, το πλήθος των μεταθέσεων που τα 3, 5 και 7 βρίσκονται μέσα στη μετάθεση με το 3 πριν το 5 που είναι πριν το 7 ισούται με το πλήθος των μεταθέσεων που το 3 είναι πριν το 7 που είναι πριν το 5 κοκ. Δεδομένου ότι η διάταξη των 3, 5, 7 μέσα σε μια μετάθεση του $\{1,2,\dots,10\}$ γίνεται με $3! = 6$ τρόπους (357, 375, 537, 573, 735, 753), το πλήθος των μεταθέσεων του $\{1,2,\dots,10\}$ που το 3 βρίσκεται πριν το 5 που βρίσκεται πριν το 7 ισούται με το $1/6$ του συνολικού πλήθους μεταθέσεων

του $\{1,2,\dots,10\}$, είναι δηλαδή $10!/6$.
Εναλλακτικά, μπορούμε να σκεφθούμε ότι μια μετάθεση του $\{1,2,\dots,10\}$ που το 3 βρίσκεται πριν το 5 που βρίσκεται πριν το 7 δημιουργείται σε 2 στάδια:
1º στάδιο: Επιλογή 3 θέσεων από τις 10 για να μπουν τα 3, 5, 7 σε αύξουσα σειρά $\rightarrow \binom{10}{3}$ τρόποι
2º στάδιο: Τοποθέτηση των υπολοίπων 7 στοιχείων $\{1,2,4,6,8,9,10\}$ σε σειρά στις υπόλοιπες θέσεις $\rightarrow 7!$ τρόποι
Από την πολ/κη αρχή υπάρχουν $\binom{10}{3}7! = \frac{10!}{3!\cancel{7!}}\cancel{7!} = \frac{10!}{6}$ διαφορετικές μεταθέσεις αυτού του τύπου.
γ) Ομοίως με τα α), β), λόγω συμμετρίας, το πλήθος των μεταθέσεων που το 7 βρίσκεται δεξιότερα των 3, 5 στη μετάθεση ισούται με το πλήθος των μεταθέσεων που το 5 βρίσκεται δεξιότερα των 3, 7 στη μετάθεση και ισούται με το πλήθος των μεταθέσεων που το 3 βρίσκεται δεξιότερα των 5, 7 στη μετάθεση. Συνεπώς το πλήθος των ζητούμενων μεταθέσεων θα είναι το $1/3$ του συνολικού πλήθους των μεταθέσεων του $\{1,2,\dots,10\}$, είναι δηλαδή $10!/3$.
Εναλλακτικά μπορούμε να σκεφθούμε ότι μια μετάθεση του $\{1,2,\dots,10\}$ που τα 3 και 5 βρίσκονται πριν το 7 δημιουργείται σε 3 στάδια:
1º στάδιο: Απόφαση για το αν το 3 ή το 5 μπει αριστερότερα στη μετάθεση $\rightarrow 2$ τρόποι
2º στάδιο: Επιλογή 3 θέσεων από τις 10 για να μπουν τα 3, 5, 7 (το 7 θα μπει στη δεξιότερη επιλεγείσα θέση και τα 3, 5 θα μπουν κατά την απόφαση του 1ου σταδίου) $\rightarrow \binom{10}{3}$ τρόποι

3^o στάδιο: Τοποθέτηση των υπολοίπων 7 στοιχείων σε σειρά $\rightarrow 7!$ τρόποι

Από την πολ/κή αρχή υπάρχουν $2\binom{10}{3}7! = 2\cdot\frac{10!}{3!\cancel{7!}}\cancel{7!} = \frac{10!}{3}$ διαφορετικές μεταθέσεις αυτού του τύπου.

δ) Μια μετάθεση στην οποία οι 5 πρώτες θέσεις καταλαμβάνονται από περιττούς δημιουργείται σε δυο στάδια:

1^o στάδιο: Τοποθέτηση των $\{1,3,5,7,9\}$ σε σειρά στις πρώτες 5 θέσεις $\rightarrow 5!$ τρόποι

2^o στάδιο: Τοποθέτηση των $\{2,4,6,8,10\}$ σε σειρά στις τελευτ. 5 θέσεις $\rightarrow 5!$ τρόποι

Από την πολ/κή αρχή υπάρχουν $5!\cdot 5! = (5!)^2$ διαφορετικές μεταθέσεις αυτού του τύπου.

ε) Μια μετάθεση στην οποία στις 3 πρώτες θέσεις δεν υπάρχουν άρτιοι αριθμοί δημιουργείται σε 2 στάδια:

1^o στάδιο: Τοποθέτηση 3 περιττών στις 3 πρώτες θέσεις $\rightarrow (5)_3 = \frac{5!}{2!}$ τρόποι

2^o στάδιο: Τοποθέτηση των υπολοίπων στοιχείων σε σειρά στις 7 τελευταίες θέσεις $\rightarrow 7!$ τρόποι

Από την πολ/κή αρχή υπάρχουν $\frac{5!\,7!}{2}$ διαφορετικές μεταθέσεις αυτού του τύπου.

Θέμα 2^o:

α) Είναι

$$S=\sum_{k=0}^{\nu}(k+2)^2\binom{\nu}{k+1}2^k \overset{j=k+1}{=} \sum_{j=1}^{\nu+1}(j+1)^2\binom{\nu}{j}2^{j-1} \overset{\binom{\nu}{j}=0 \text{ για } j>\nu}{=} \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\nu}(j+1)^2\binom{\nu}{j}2^j$$

Όμως

$$(j+1)^2\binom{\nu}{j} = (j^2+2j+1)\binom{\nu}{j} = (\,j(j-1)+3j+1)\binom{\nu}{j}$$

οπότε

$$S=\frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{\nu} j(j-1)\binom{\nu}{j}2^j + 3\sum_{j=1}^{\nu} j\binom{\nu}{j}2^j + \sum_{j=1}^{\nu}\binom{\nu}{j}2^j\right)$$

Ιδιότητα $\binom{v}{j} = \frac{v}{j}\binom{v-1}{j-1}$ για $j \neq 0$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{j=2}^{v} j(j-1)\, \frac{v}{j} \cdot \frac{v-1}{j-1}\binom{v-2}{j-2} 2^j + 3\sum_{j=1}^{v} j\, \frac{v}{j}\binom{v-1}{j-1} 2^j + \sum_{j=1}^{v}\binom{v}{j}2^j \right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(4v(v-1)\sum_{j=2}^{v}\binom{v-2}{j-2}2^{j-2} + 6v\sum_{j=1}^{v}\binom{v-1}{j-1}2^{j-1} + \sum_{j=1}^{v}\binom{v}{j}2^j \right)$$

$$\overset{\substack{\ell=j-2 \\ m=j-1}}{=} \frac{1}{2}\left(4v(v-1)\sum_{\ell=0}^{v-2}\binom{v-2}{\ell}2^{\ell} + 6v\sum_{m=0}^{v-1}\binom{v-1}{m}2^{m} + \sum_{j=1}^{v}\binom{v}{j}2^j \right)$$

$$\overset{\substack{\text{Διωνυμ.} \\ \text{θεωρ.}}}{=} \frac{1}{2}\left(4v(v-1)(1+2)^{v-2} + 6v(1+2)^{v-1} + (1+2)^v - \binom{v}{0}2^0 \right)$$

$$= \frac{4v(v-1)3^{v-2} + 6v3^{v-1} + 3^v - 1}{2}$$

β) Κάθε μη-αρνητική ακέραια λύση (x_1, x_2, x_3, x_4) του συστήματος (Σ) είναι της μορφής (x_1, x_2, x_3, x_3+2) με (x_1, x_2, x_3) να είναι ακέραια μη-αρνητική λύση της $x_1+x_2+x_3=8$. Πράγματι αφαιρώντας την 1^{η} από τη 2^{η} εξίσωση του (Σ) έχουμε $x_4 - x_3 = 2$.

Επομένως:

$$\begin{array}{c}\# \text{ μη-αρνητικών} \\ \text{ακεραίων λύσεων} \\ (x_1,x_2,x_3,x_4) \text{ του } (\Sigma)\end{array} = \begin{array}{c}\# \text{ μη-αρνητικών} \\ \text{ακεραίων λύσεων} \\ \text{της } x_1+x_2+x_3=8\end{array} = \left[\begin{matrix}3\\8\end{matrix}\right] = \binom{3+8-1}{8}.$$

Θέμα $3^{\text{ο}}$:

α) Είναι μεταθέσεις 3 ειδών στοιχείων Α, Β, Γ που καθένα εμφανίζεται 3 φορές. Το πλήθος τους είναι

$$\frac{(3+3+3)!}{3!\,3!\,3!} = \frac{9!}{(3!)^3}.$$

β) Είναι μεταθέσεις 3 ειδών στοιχείων, των ΑΑΑ, Β, Γ που το ΑΑΑ εμφανίζεται 1 φορά ενώ το Β και Γ από 3 φορές το καθένα. Το πλήθος τους είναι

$$\frac{(1+3+3)!}{1!\,3!\,3!} = \frac{7!}{(3!)^2}$$

γ) Έστω Ω το σύνολο όλων των μεταθέσεων των

3 A, 3 B και 3 Γ και

A_1 : το σύνολο των μεταθέσεων που τα 3 A είναι συνεχόμ.

A_2 : το σύνολο των μεταθέσεων που τα 3 B είναι συνεχόμ.

A_3 : το σύνολο των μεταθέσεων που τα 3 Γ είναι συνεχόμ.

Το ζητούμενο πλήθος είναι $N(A_1' A_2' A_3')$ που από την αρχή εγκλεισμού - αποκλεισμού είναι

$$N(A_1' A_2' A_3') = N(\Omega) - N(A_1) - N(A_2) - N(A_3) + N(A_1A_2) + N(A_1A_3) + N(A_2A_3) - N(A_1A_2A_3)$$

Όμως από το α) είναι $N(\Omega) = 9!/(3!)^3$, ενώ από το β) είναι $N(A_1) = 7!/(3!)^2$ και όμοια $N(A_2) = N(A_3) = 7!/(3!)^2$.

Το σύνολο A_1A_2 περιέχει τις μεταθέσεις των 3A, 3B και 3Γ που τα 3A είναι συνεχόμενα και τα 3B επίσης συνεχόμενα. Αλλά αυτές είναι μεταθέσεις 3 ειδών στοιχείων, των AAA, BBB και Γ που τα AAA και BBB εμφανίζονται μια φορά ενώ το Γ 3 φορές. Άρα $N(A_1A_2) = \frac{(1+1+3)!}{1!\,1!\,3!} = 5!/3!$ και όμοια $N(A_1A_3) = N(A_2A_3) = 5!/3!$. Τέλος, το σύνολο $A_1A_2A_3$ περιέχει τις μεταθέσεις των 3 στοιχείων AAA, BBB, ΓΓΓ που είναι 3! στο πλήθος. Τελικά το ζητούμενο πλήθος τρόπων είναι $9!/(3!)^3 - 3\cdot 7!/(3!)^2 + 3\, 5!/3! - 3!$

Θέμα 4ο:

α) Οι απαριθμήτριες των στοιχείων $w_0, w_1, \ldots, w_{\nu+1}$ είναι

$$A_0(t,x_0) = (tx_0)^1 + (tx_0)^3 + (tx_0)^5 + \cdots$$

$$A_j(t,x_j) = (tx_j)^0 + (tx_j)^1 + (tx_j)^2 + \cdots, \quad j = 1,2,\ldots,\nu$$

$$A_{\nu+1}(t,x_{\nu+1}) = (tx_{\nu+1})^1 + (tx_{\nu+1})^2.$$

οπότε

$$A_0(t) \equiv A_0(t,1) = t^1 + t^3 + t^5 + \cdots = \frac{t}{1-t^2}$$

$$A_j(t) \equiv A_j(t,1) = \frac{1}{1-t}, \quad j = 1,2,\ldots,\nu$$

$$A_{\nu+1}(t) \equiv t + t^2 = t(1+t)$$

Η γεννήτρια των συνδυασμών είναι

$$A(t) = A_0(t)\,A_1(t)\cdots A_{\nu+1}(t) = \frac{t}{1-t^2}\cdot\left(\frac{1}{1-t}\right)^{\nu} t(1+t) = t^2\cdot\frac{1}{(1-t)^{\nu+1}}$$

b) $\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k = A(t) = t^2 \frac{1}{(1-t)^{\nu+1}} = t^2 \sum_{j=0}^{\infty} \left[\begin{matrix} \nu+1 \\ j \end{matrix} \right] t^j$

$= \sum_{j=0}^{\infty} \left[\begin{matrix} \nu+1 \\ j \end{matrix} \right] t^{j+2} = \sum_{k=2}^{\infty} \left[\begin{matrix} \nu+1 \\ k-2 \end{matrix} \right] t^k$

οπότε

$a_k = \left[\begin{matrix} \nu+1 \\ k-2 \end{matrix} \right], \quad k = 2, 3, \ldots$

$a_k = 0, \quad k = 0, 1.$