

## ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ Ι, ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2011 - ΟΜΑΔΑ ΘΕΜΑΤΩΝ Β

**Θέμα 1.** Στο Κίνο κληρώνονται 20 αριθμοί από τους  $1, 2, \dots, 80$  (δεν ενδιαφέρει η σειρά εξαγωγής των κλήρων και δεν γίνεται επανάθεση των κλήρων, οπότε κάθε αριθμός από τους  $1, 2, \dots, 80$  εμφανίζεται το πολύ μια φορά). Ένα αποτέλεσμα της κλήρωσης είναι επομένως ένα σύνολο 20 αριθμών από τους  $1, 2, \dots, 80$ . Ένας παίκτης επιλέγει 12 αριθμούς από τους  $1, 2, \dots, 80$  και συμπληρώνει το δελτίο του με αυτούς.

(α) Να βρεθεί ο αριθμός των δυνατών αποτελεσμάτων της κλήρωσης που έχουν το πολύ 11 κοινούς αριθμούς με το δελτίο του παίκτη.

(β) Να βρεθεί ο αριθμός των δυνατών αποτελεσμάτων της κλήρωσης που έχουν ακριβώς  $j$  κοινούς αριθμούς με το δελτίο του παίκτη.

**Θέμα 2.** Ρίχνουμε ένα συνηθισμένο ζάρι (κανονικό εξάεδρο)  $n$  φορές και καταγράφουμε με τη σειρά τις ενδείξεις. Ένα αποτέλεσμα είναι μια διατεταγμένη  $n$ -αδα  $(i_1, i_2, \dots, i_n)$ ,  $i_1, i_2, \dots, i_n \in \{1, 2, \dots, 6\}$ .

(α) Να βρεθεί το πλήθος των αποτελεσμάτων  $(i_1, i_2, \dots, i_n)$  στα οποία καθένας από τους αριθμούς 2, 4, 6 εμφανίζεται τουλάχιστον μια φορά.

(β) Να βρεθεί το πλήθος των αποτελεσμάτων  $(i_1, i_2, \dots, i_n)$  για τα οποία ισχύει  $i_1 \geq i_2 \geq \dots \geq i_n$ .

**Θέμα 3.** Να βρεθεί το πλήθος των ακέραιων λύσεων της εξίσωσης

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{\nu+1} = 2\nu - 1$$

με τους περιορισμούς

$$0 \leq x_i \leq 1, \quad i = 1, 2, \dots, \nu - 1$$

$$x_\nu \geq 0$$

$$x_\nu \leq x_{\nu+1} \leq x_\nu + 1.$$

**Θέμα 4.** Έστω  $\alpha_\kappa$  το πλήθος των συνδυασμών  $2\nu + 2$  ανά  $\kappa$  με επανάληψη των στοιχείων του  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{2\nu+2}\}$  όπου τα στοιχεία  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{2\nu}$  επιτρέπεται να εμφανίζονται το πολύ μια φορά το καθένα, το στοιχείο  $\omega_{2\nu+1}$  επιτρέπεται να εμφανίζεται το πολύ δυο φορές και το στοιχείο  $\omega_{2\nu+2}$  επιτρέπεται να εμφανίζεται πολλαπλάσιο του 3 αριθμό φορών ( $0$  ή  $3$  ή  $6$  ή  $\dots$ ).

(α) Να υπολογιστεί η γεννήτρια συνδυασμών  $A(t) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \alpha_\kappa t^\kappa$ .

(β) Να υπολογιστεί η διαφορά  $\alpha_\kappa - \alpha_{\kappa-1}$ ,  $\kappa \geq 1$ .

(γ) Να υπολογιστεί (δηλ. να βρεθεί κλειστός τύπος για) το  $\alpha_\nu$ .

**ΝΑ ΓΡΑΦΟΥΝ ΟΛΑ ΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΣΕ 2 ΩΡΕΣ. ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!**