

ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ Ι, ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2011 - ΟΜΑΔΑ ΘΕΜΑΤΩΝ Α

Θέμα 1. Στο Κίνο κληρώνονται 20 αριθμοί από τους $1, 2, \dots, 80$ (δεν ενδιαφέρει η σειρά εξαγωγής των κλήρων και δεν γίνεται επανάθεση των κλήρων, οπότε κάθε αριθμός από τους $1, 2, \dots, 80$ εμφανίζεται το πολύ μια φορά). Ένα αποτέλεσμα της κλήρωσης είναι επομένως ένα σύνολο 20 αριθμών από τους $1, 2, \dots, 80$. Ένας παίκτης επιλέγει 10 αριθμούς από τους $1, 2, \dots, 80$ και συμπληρώνει το δελτίο του με αυτούς.

(α) Να βρεθεί ο αριθμός των δυνατών αποτελεσμάτων της κλήρωσης που έχουν ακριβώς j κοινούς αριθμούς με το δελτίο του παίκτη.

(β) Να βρεθεί ο αριθμός των δυνατών αποτελεσμάτων της κλήρωσης που έχουν το πολύ 9 κοινούς αριθμούς με το δελτίο του παίκτη.

Θέμα 2. Ρίχνουμε ένα συνηθισμένο ζάρι (κανονικό εξάεδρο) n φορές και καταγράφουμε με τη σειρά τις ενδείξεις. Ένα αποτέλεσμα είναι μια διατεταγμένη n -αδα (i_1, i_2, \dots, i_n) , $i_1, i_2, \dots, i_n \in \{1, 2, \dots, 6\}$.

(α) Να βρεθεί το πλήθος των αποτελεσμάτων (i_1, i_2, \dots, i_n) για τα οποία ισχύει $i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_n$.

(β) Να βρεθεί το πλήθος των αποτελεσμάτων (i_1, i_2, \dots, i_n) στα οποία καθένας από τους αριθμούς $1, 2, 3$ εμφανίζεται τουλάχιστον μια φορά.

Θέμα 3. Να βρεθεί το πλήθος των ακέραιων λύσεων της εξίσωσης

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{\nu+1} = 2\nu$$

με τους περιορισμούς

$$x_1 \geq 0$$

$$x_1 \leq x_2 \leq x_1 + 1$$

$$0 \leq x_i \leq 1, \quad i = 3, 4, \dots, \nu + 1.$$

Θέμα 4. Έστω α_κ το πλήθος των συνδυασμών $2\nu + 2$ ανά κ με επανάληψη των στοιχείων του $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{2\nu+2}\}$ όπου τα στοιχεία $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{2\nu+1}$ επιτρέπεται να εμφανίζονται το πολύ μια φορά το καθένα και το στοιχείο $\omega_{2\nu+2}$ επιτρέπεται να εμφανίζεται άρτιο αριθμό φορές (0 ή 2 ή 4 ή \dots).

(α) Να υπολογιστεί η γεννήτρια συνδυασμών $A(t) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \alpha_\kappa t^\kappa$.

(β) Να υπολογιστεί η διαφορά $\alpha_\kappa - \alpha_{\kappa-1}$, $\kappa \geq 1$.

(γ) Να υπολογιστεί (δηλ. να βρεθεί κλειστός τύπος για) το α_ν .

ΝΑ ΓΡΑΦΟΥΝ ΟΛΑ ΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΣΕ 2 ΩΡΕΣ. ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!