

ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ Ι, ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2008 - ΟΜΑΔΑ ΘΕΜΑΤΩΝ Β

Θέμα 1. Θεωρούμε το σύνολο $\Omega = \{1, 2, \dots, 2008\}$.

(α) (1 βαθμός) Πόσες είναι οι μεταθέσεις των στοιχείων του Ω στις οποίες τα άρτια στοιχεία καταλαμβάνουν τις τελευταίες 1004 θέσεις (δηλαδή τις θέσεις 1005, 1006, ..., 2008);

(β) (1 βαθμός) Πόσες είναι οι μεταθέσεις των στοιχείων του Ω στις οποίες το στοιχείο 2008 βρίσκεται σε κάποια από τις θέσεις 1 έως 1000 και το στοιχείο 2007 σε κάποια από τις θέσεις 1001 έως 2008;

(γ) (1 βαθμός) Πόσες είναι οι μεταθέσεις των στοιχείων του Ω στις οποίες τα στοιχεία 2006, 2007 και 2008 βρίσκονται σε κάποιες από τις θέσεις 1 έως 1000;

Θέμα 2. (α) (1 βαθμός) Να βρεθεί το πλήθος των ακέραιων μη-αρνητικών λύσεων της ανίσωσης

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{10} \leq 2008,$$

με τον περιορισμό ο x_1 να είναι περιττός.

(β) (2 βαθμοί) Να βρεθεί το πλήθος των ακέραιων μη-αρνητικών λύσεων της εξίσωσης

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{10} = 2008,$$

με τους περιορισμούς $20 \leq x_i \leq 400$ για $i = 1, 2, \dots, 5$ και $x_i \geq 0$ για $i = 6, 7, \dots, 10$.

Θέμα 3. (α) (2 βαθμοί) Να υπολογιστεί το άθροισμα

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k}{2k} \binom{2k}{k} \frac{(-1)^k}{k+1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

(β) (1 βαθμός) Να υπολογιστεί το άθροισμα

$$\sum_{j=1}^{m+1} \frac{1}{j+1} \binom{m}{j-1}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Θέμα 4. Έστω a_x , $x = 0, 1, 2, \dots$ το πλήθος των συνδυασμών με επανάληψη των στοιχείων του $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{2008}\}$ ανά x , όπου τα $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{999}$ εμφανίζονται περιττό αριθμό φορών (δηλαδή 1 ή 3 ή 5 κλπ. φορές) το καθένα, τα $\omega_{1000}, \omega_{1001}, \dots, \omega_{1999}$ εμφανίζονται το πολύ 1 φορά το καθένα και τα $\omega_{2000}, \omega_{2001}, \dots, \omega_{2008}$ εμφανίζονται ακριβώς 2 φορές το καθένα.

(α) (1 βαθμός) Να προσδιοριστεί η γεννήτρια συνδυασμών

$$A(t) = \sum_{x=0}^{\infty} a_x t^x.$$

(β) (1 βαθμός) Να βρεθεί ένας όσο το δυνατόν απλούστερος τύπος για τον υπολογισμό του πλήθους a_x των συνδυασμών με επανάληψη των στοιχείων του $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{2008}\}$ ανά x που πληρούν τις παραπάνω συνθήκες.

ΝΑ ΓΡΑΦΟΥΝ ΟΛΑ ΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΣΕ 2 ΩΡΕΣ. ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!