

ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ Ι, ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2008 - ΟΜΑΔΑ ΘΕΜΑΤΩΝ Α

Θέμα 1. Θεωρούμε το σύνολο $\Omega = \{1, 2, \dots, 2008\}$.

(α) (1 βαθμός) Πόσες είναι οι μεταθέσεις των στοιχείων του Ω στις οποίες το στοιχείο 1 βρίσκεται σε κάποια από τις θέσεις 1 έως 200 και το στοιχείο 2 σε κάποια από τις θέσεις 201 έως 2008;

(β) (1 βαθμός) Πόσες είναι οι μεταθέσεις των στοιχείων του Ω στις οποίες τα στοιχεία 1, 2 και 3 βρίσκονται σε κάποιες από τις θέσεις 1 έως 200;

(γ) (1 βαθμός) Πόσες είναι οι μεταθέσεις των στοιχείων του Ω στις οποίες τα περιττά στοιχεία καταλαμβάνουν περιττές θέσεις;

Θέμα 2. (α) (2 βαθμοί) Να βρεθεί το πλήθος των ακέραιων μη-αρνητικών λύσεων της εξίσωσης

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{20} = 2008,$$

με τους περιορισμούς $10 \leq x_i \leq 200$ για $i = 1, 2, \dots, 10$ και $x_i \geq 0$ για $i = 11, 12, \dots, 20$.

(β) (1 βαθμός) Να βρεθεί το πλήθος των ακέραιων μη-αρνητικών λύσεων της ανίσωσης

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{20} \leq 2008,$$

με τον περιορισμό ο x_{20} να είναι άρτιος.

Θέμα 3. (α) (1 βαθμός) Να υπολογιστεί το άθροισμα

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{k+2} \binom{n}{k}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

(β) (2 βαθμοί) Να υπολογιστεί το άθροισμα

$$\sum_{j=0}^{\infty} \binom{2j+1}{j} \binom{m+j+1}{2j+1} \frac{(-1)^j}{m+j+1}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Θέμα 4. Έστω a_x , $x = 0, 1, 2, \dots$ το πλήθος των συνδυασμών με επανάληψη των στοιχείων του $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{2008}\}$ ανά x , όπου τα $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{1000}$ εμφανίζονται το πολύ 1 φορά το καθένα, τα $\omega_{1001}, \omega_{1002}, \dots, \omega_{1999}$ εμφανίζονται άρτιο αριθμό φορές (δηλαδή 0 ή 2 ή 4 κλπ. φορές) το καθένα και τα $\omega_{2000}, \omega_{2001}, \dots, \omega_{2008}$ εμφανίζονται ακριβώς 1 φορά το καθένα.

(α) (1 βαθμός) Να προσδιοριστεί η γεννήτρια συνδυασμών

$$A(t) = \sum_{x=0}^{\infty} a_x t^x.$$

(β) (1 βαθμός) Να βρεθεί ένας όσο το δυνατόν απλούστερος τύπος για τον υπολογισμό του πλήθους a_x των συνδυασμών με επανάληψη των στοιχείων του $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{2008}\}$ ανά x που πληρούν τις παραπάνω συνθήκες.

ΝΑ ΓΡΑΦΟΥΝ ΟΛΑ ΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΣΕ 2 ΩΡΕΣ. ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!