

ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ Ι, ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΣ 2008 - ΟΜΑΔΑ ΘΕΜΑΤΩΝ Β

Θέμα 1. Θεωρούμε το σύνολο $\Omega = \{1, 2, 3, \dots, 2008\}$.

(α) (1 βαθμός) Πόσες είναι οι μεταθέσεις των στοιχείων του Ω στις οποίες όλα τα πολλαπλάσια του 10 είναι διαδοχικά;

(β) (1 βαθμός) Πόσες είναι οι μεταθέσεις των στοιχείων του Ω στις οποίες δεν υπάρχουν διαδοχικά πολλαπλάσια του 10;

(γ) (1 βαθμός) Πόσα είναι τα υποσύνολα του Ω τα οποία περιέχουν 140 ακριβώς στοιχεία από τα οποία ακριβώς 100 είναι περιττοί αριθμοί;

(δ) (1 βαθμός) Πόσα είναι τα υποσύνολα του Ω που περιέχουν ακριβώς 20 στοιχεία μεγαλύτερα του 1000 και οσαδήποτε στοιχεία μικρότερα ή ίσα του 1000;

Θέμα 2. Θεωρούμε το αλφάβητο $\Omega = \{F, G, H, I\}$.

(α) (2 βαθμοί) Πόσες είναι οι διαφορετικές λέξεις 8 γραμμάτων που περιέχουν ακριβώς 2 φορές κάθε γράμμα του Ω και δεν έχουν ίδια διαδοχικά γράμματα;

(β) (1 βαθμός) Πόσες είναι οι διαφορετικές λέξεις 12 γραμμάτων που περιέχουν ακριβώς 3 φορές κάθε γράμμα του Ω , αρχίζουν με F και τελειώνουν με G ;

Θέμα 3. (α) (1 βαθμός) Να υπολογιστεί το άθροισμα

$$\sum_{\rho=0}^x \frac{1}{\rho+1} \binom{x}{\rho}^2.$$

(β) (1 βαθμός) Να υπολογιστεί το άθροισμα

$$\sum_{x=0}^y \frac{x}{y} \binom{y}{x} 5^x.$$

Θέμα 4. Έστω a_x , $x = 0, 1, 2, \dots$ το πλήθος των συνδυασμών με επανάληψη των στοιχείων του $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{2008}\}$ ανά x , όπου το ω_1 εμφανίζεται πολλαπλάσιο του 9 αριθμό φορές (0, 9, 18, 27, ... φορές), το ω_2 εμφανίζεται 0 ή 3 ή 6 φορές, το ω_3 εμφανίζεται το πολύ 2 φορές και τα υπόλοιπα ω_x , $x = 4, 5, \dots, 2008$ εμφανίζονται χωρίς περιορισμό (0, 1, 2, 3, ... φορές).

(α) (1 βαθμός) Να προσδιοριστεί η γεννήτρια συνδυασμών

$$A(t) = \sum_{x=0}^{\infty} a_x t^x.$$

(β) (1 βαθμός) Να βρεθεί ένας όσο το δυνατόν απλούστερος τύπος για τον υπολογισμό του πλήθους a_x των συνδυασμών με επανάληψη των στοιχείων του $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{2008}\}$ ανά x που πληρούν τις παραπάνω συνθήκες.

ΝΑ ΓΡΑΦΟΥΝ ΟΛΑ ΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΣΕ 2 ΩΡΕΣ. ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!