Υπολογισμοί Αθροισμάτων (31/03)

① Βασικές Γεννήτριες

1] $\sum_{k=0}^{\infty} t^k = \frac{1}{1-t}$, $|t|<1$

2] $\sum_{k=0}^{\nu} \binom{\nu}{k} t^k = (1+t)^\nu$, $\nu = 1, 2, 3, \ldots$

3] $\sum_{k=0}^{\infty} \left[{\nu \atop k}\right] t^k = \frac{1}{(1-t)^\nu}$, $|t|<1$, $\nu = 1, 2, \ldots$

4] $\sum_{k=0}^{\infty} \binom{x}{k} t^k = (1+t)^x$, $|t|<1$, $x \in \mathbb{R}$

5] $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} = e^t$

② Αθροίσματα τύπου

$\sum_{k=0}^{\nu} f(x) \binom{\nu}{k} p^k$

πολ/μο k

B1] Αναλύω το $f(k)$ σε καθοδικά παραγοντικά:
$f(k) = a_r (k)_r + a_{r-1}(k)_{r-1} + \ldots + a_0 (k)_0$
πολ/μο βαθμού r

B2] Υπολογίζω τα επί μέρους αθρ.

$\sum_{k=0}^{\nu} (k)_r \binom{\nu}{k} p^k$

είτε με παραγώγιση της διων. γεν. είτε $\binom{\nu}{k} = \frac{\nu}{k}\binom{\nu-1}{k-1}$

③ Παράδειγμα

$S = \sum_{k=0}^{\nu} (k^2 + 5k - 2) \binom{\nu}{k} 7^k$

Λύση. $k^2+5k-8 = a_2(k)_2 + a_1(k)_1 + a_0$

$$= a_2 k(k-1) + a_1 k + a_0$$

$$= a_2 k^2 + (a_1 - a_2)k + a_0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_2 = 1 \\ a_1 - a_2 = 5 \\ a_0 = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} a_0 = -8 \\ a_1 = 6 \\ a_2 = 1 \end{matrix}$$

Άρα $S = \underbrace{\sum_{k=0}^{\nu} k(k-1)\binom{\nu}{k}7^k}_{S_2} + \underbrace{6\sum_{k=0}^{\nu} k\binom{\nu}{k}7^k}_{S_1} - \underbrace{8\sum_{k=0}^{\nu}\binom{\nu}{k}7^k}_{S_0}$

1ος τρόπος.

$$\sum_{k=0}^{\nu}\binom{\nu}{k}t^k = (1+t)^\nu$$

$$\overset{d/dt}{\Longrightarrow} \sum_{k=1}^{\nu} k\binom{\nu}{k}t^{k-1} = \nu(1+t)^{\nu-1}$$

$$\overset{d/dt}{\Longrightarrow} \sum_{k=2}^{\nu} k(k-1)\binom{\nu}{k}t^{k-2} = \nu(\nu-1)(1+t)^{\nu-2}$$

Άρα $S = 7^2\nu(\nu-1)(1+7)^{\nu-2} + 6\cdot 7\nu(1+7)^{\nu-1} - 8(1+7)^\nu$

$$= 49\nu(\nu-1)8^{\nu-2} + 42\nu 8^{\nu-1} - 8^{\nu+1}$$

2ος τρόπος

$$\sum_{k=0}^{\nu} k\binom{\nu}{k}t^k = \sum_{k=1}^{\nu} \cancel{k}\cdot\frac{\nu}{\cancel{k}}\binom{\nu-1}{k-1}t^k$$

$$= \nu\sum_{k=1}^{\nu}\binom{\nu-1}{k-1}t^k \underset{j=k-1}{=} \nu\sum_{j=0}^{\nu-1}\binom{\nu-1}{j}t^{j+1} = t\nu(1+t)^{\nu-1}$$

(4) παράδειγμα:

$$S = \sum_{k=0}^{\nu}\frac{1}{k+1}\binom{\nu}{k}6^k$$

Λύση:

1ος τρόπος (ολοκλ.)

$$\sum_{k=0}^{\nu} \binom{\nu}{k} t^k = (1+t)^\nu$$

$\int_0^u dt$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\nu} \binom{\nu}{k} \int_0^u t^k dt = \int_0^u (1+t)^\nu dt$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\nu} \binom{\nu}{k} \frac{u^{k+1}}{k+1} = \frac{(1+u)^{\nu+1} - 1}{\nu+1}$$

$$\overset{u=6}{\Rightarrow} \sum_{k=0}^{\nu} \frac{1}{k+1} \binom{\nu}{k} 6^k = \frac{7^{\nu+1} - 1}{6(\nu+1)}$$

2ος τρόπος

$$\binom{\nu}{k} = \frac{\nu}{k} \binom{\nu-1}{k-1}$$

$$\sum_{k=0}^{\nu} \frac{1}{k+1} \binom{\nu}{k} 6^k = \frac{1}{\nu-1} \sum_{k=0}^{\nu} \frac{\nu+1}{k+1} \binom{\nu}{k} 6^k$$

$$\underset{j=k+1}{=} \frac{1}{6(\nu+1)} \sum_{j=1}^{\nu+1} \binom{\nu+1}{j} 6^j = \frac{1}{6}\left((1+6)^{\nu+1} - \binom{\nu+1}{0} 6^0\right) = \frac{7^{\nu+1} - 1}{6(\nu+1)}$$

(5) Αθροίσματα τύπου

$$\sum_{k=0}^{\nu} \frac{f(x)}{(k+1)(k+2)\ldots(k+\ell)} p^k$$

Πολ/μο του k

$f(x) \rightarrow$ Γραμ. συνδιασμός καθοδικών Παραγοντικών τάξης - 1 έως (βαθμό f) - f

Υπολογισμός της επί μέρους αθρ(ολοκληρ/ παραγ: $n\binom{\nu}{k}=\frac{\nu}{k}\binom{\nu-1}{k-1}$

$$S=\sum_{k=0}^{\nu}\frac{k^3+3k^2-2k+5}{(k+1)(k+2)}\binom{\nu}{k}7^k$$

Λύση:

$$\frac{k^3+3k^2-2k+5}{(k+1)(k+2)}=a_1(k)_1+a_0(k)_0+a_{-1}(k)_{-1}+a_{-2}(k)_{-2}$$

$$=a_1k+a_0+a_{-1}\frac{1}{k+1}+a_{-2}\frac{1}{(k+1)\cdot(k+2)}$$

$$=\frac{a_1k(k+1)(k+2)+a_0(k+1)(k+2)+a_{-1}(k+2)+a_{-2}}{(k+1)(k+2)}$$

$$\left\{\begin{aligned}1&=a_1\\3&=3a_1+a_0\\-2&=2a_1+3a_0+a_{-1}\\5&=2a_0+2a_{-1}+a_{-2}\end{aligned}\right\}\Longleftrightarrow\left\{\begin{aligned}a_1&=1\\a_0&=0\\a_{-1}&=-4\\13&=a_{-2}\end{aligned}\right.$$

$$S=\underbrace{\sum_{k=0}^{\nu}k\binom{\nu}{k}7^k}_{\text{όπως πριν}}-4\underbrace{\sum_{k=0}^{\nu}\frac{1}{k+1}\binom{\nu}{k}7^k}_{\text{όπως πριν}}+13\underbrace{\sum_{k=0}^{\nu}\frac{1}{(k+1)(k+2)}\binom{\nu}{k}7^k}_{S_2}$$

$$S_2=\frac{1}{7^2(\nu+1)(\nu+2)}\left[\sum_{k=0}^{\nu}\binom{\nu+2}{k+2}\cdot 7^{k+2}\right]$$

$$\| \; j=k+2$$

$$\sum_{j=2}^{\nu+2}\binom{\nu+2}{j}7^j$$

$$\|$$

$$(1+7)^{\nu+2}-\binom{\nu+2}{0}7^0-\binom{\nu+2}{1}7^0$$

Άρα $S_2=\dfrac{8^{\nu+2}-1-7(\nu+2)}{49(\nu+1)(\nu+2)}$

⑦ Αθρ τυπου

$$\sum_{\kappa=0}^{\nu \text{ ή } \infty} \underbrace{f(\kappa)}_{\text{πολ/μο του } \kappa} \rho^{\kappa}$$

, για οποιοδ. ρ, αν ν = ∞
για ρ με $|\rho| < 1$, για ν = ∞

Β1| $f(k) \rightarrow$ Αναλ σε καθ. παραγ

Β2| Υπολογ επι μερους αθρ με παραγωγιση.
Για πεπερ. ν χρησιμοποιουμε.

$$\sum_{k=0}^{\nu} t^k = \frac{1-t^{\nu+1}}{1-t}, \quad t \neq 1$$

⑧ παραδειγμα.

$$S = 1 \cdot 3 \cdot 2^4 + 2 \cdot 4 \cdot 2^5 + 3 \cdot 5 \cdot 2^6 + \dots + 2024 \cdot 2026 \cdot 2^{2027} =$$

Λυση:

$$S = \sum_{\kappa=1}^{2024} k(k+2)\, 2^{k+3} =$$

$$k \cdot (k+2) = \alpha_2 (\kappa)_2 + a_1 (k)_1 + a_0 = k(k-1) + 3k + 0$$

Αρα $S = \sum_{k=1}^{2024} k(k-1)\, 2^{k+3} + 3 \sum_{\kappa=1}^{2024} k\, 2^{k+3}$

Εχουμε

$$\sum_{\kappa=0}^{\nu} t^k = \frac{1-t^{\nu+1}}{1-t}$$

$$\xrightarrow{d/dt} \sum_{\kappa=1}^{\nu} k t^{k-1} = \frac{-(\nu+1)t^{\nu} \cdot (1-t) + (1-t^{\nu+1})}{(1-t)^2} = \frac{\nu t^{(\nu+1)} - (\nu+1)t^{\nu} + 1}{(1-(t)^2}$$

$$\overset{d/dt}{\Longrightarrow} \sum_{k=2}^{\nu} k(k-1)t^{k-2} = \frac{\big((\nu+1)\nu t - (\nu+1)\nu t^{\nu-1}\big)(1-t)+(\nu t^{\nu+1}-(\nu+1)t^{\nu}+1)2\ldots}{(1-t)^4}$$

Άρα

$$S = 3\,\frac{2^4\cdot 2024\cdot 2^{2025} - 2025\cdot 2^{2024}+1}{(1-2)^2} + \ldots$$

(9) Παράδειγμα

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)^2 \left(\frac{1}{3}\right)^k = ;$$

Λύση:

$$\sum_{k=0}^{\infty} t^k = \frac{1}{1-t}$$

$$\overset{d/dt}{\Longrightarrow} \sum_{k=1}^{\infty} k\,t^{k-1} = \frac{1}{(1-t)^2}$$

$$\overset{d/dt}{\Longrightarrow} \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)t^{k-2} = \frac{2}{(1-t)^3}$$

διότι $(k+1)^2 = k^2+2k+1$
$= k(k-1)+3k+1$

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)\left(\frac{1}{3}\right)^k + 3\sum_{k=0}^{\infty} k\left(\frac{1}{3}\right)^k + \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^k$$

$$= \left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\frac{2}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^3} + 3\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2} + \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \ldots$$

(10) Παράδειγμα

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+\nu^3 = ; = \sum_{k=1}^{\nu} k^3$$

ομοίως

(11) Γενική μεθοδολογία υπολογ. αθρ

Σύνδεση γεννήτριας ακολουθίας a_ν με γεννήτρια ακολουθίας μερικών αθρ $b_\nu = \sum_{k=0}^{\nu} a_k$

$$a_\nu \longrightarrow \underbrace{\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu t^\nu}_{A(t)}$$

$$b_\nu = a_0 + a_1 + \dots + a_\nu \longrightarrow \underbrace{\sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu t^\nu}_{B(t)}$$

Ισχύει:

$$B(t) = A(t)\,\frac{1}{1-t}$$

Αποδ:

$$A(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$$

$$\frac{1}{1-t} = \sum_{k=0}^{\infty} \underset{\gamma_k}{\overset{\shortparallel}{1}} \cdot t^k$$

τότε ο συντελεστής του t^ν στο γινόμενο $A(t)$,

$$a_0 \underset{1}{\overset{}{\gamma_\nu}} + a_1 \underset{1}{\gamma_{\nu-1}} + a_2 \underset{1}{\gamma_{\nu-2}} + \dots + a_\nu \underset{1}{\gamma_0} = b_\nu$$