

7) # συνδ. του $\mathcal{O} = \{1, 2, \dots, v\}$ ανά k υπάρχουν που δεν περιέχουν διαδ. ακέραιους.
(χωρίς επανάληψη)

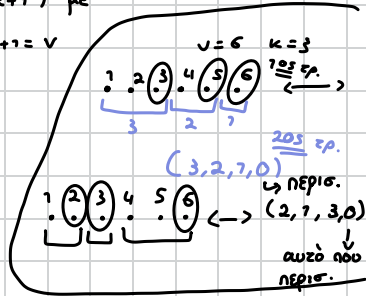
π.χ. $v=6$ $\{1, 3, 5\}$, $\{1, 3, 6\}$, $\{1, 4, 6\}$
 $k=3$ $\{2, 4, 6\}$

= 4

Γενική ιδέα για απαρίθμηση συνδ. με περιορ. στα "κενά" μεταξύ των στοιχείων:

$\{i_1, i_2, \dots, i_k\}$ συνδ. (με επανάλ.) του $\{1, 2, \dots, v\}$ $\longleftrightarrow (x_1, x_2, \dots, x_{k+1})$ με

$x_1, x_2, \dots, x_{k+1} = v$
 $x_1 = i_1$
 $x_2 = i_2 - i_1$
 $\vdots$
 $x_k = i_k - i_{k-1}$
 $x_{k+1} = v - i_k$



Με αυτή την ιδέα :

συνδ. v ανά k = # ακερ. λύσεων της
χωρίς επανάληψη

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{k+1} = v \text{ με}$$

$$x_1 \geq 1$$

$$x_2 \geq 1$$

$$\vdots$$

$$x_k \geq 1$$

$$x_{k+1} \geq 0$$

(βλέπω τα κενά ανάμεσα στα στοιχεία)

$$y_1 = x_1 - 1$$

$$y_2 = x_2 - 1$$

$$\vdots$$

$$y_k = x_k - 1$$

$$y_{k+1} = x_{k+1}$$

$$= \text{\# ακερ. λύσεων της } y_1 + y_2 + \dots + y_{k+1} = v - k$$

$$y_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, k+1$$

$$= \begin{pmatrix} k+1 \\ v-k \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} k+1+v-k-1 \\ v-k \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} v \\ v-k \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} v \\ k \end{pmatrix}}$$

$$\# \text{ συνδ. } v \text{ ανά } k \text{ με} = \# \text{ ακερ. λύσεων της } x_1 + x_2 + \dots + x_{k+1} = v$$

εναλλαγής

$$\text{με } x_i \geq 1$$

$$x_2 \geq 0$$

$$\vdots$$

$$x_k \geq 0$$

$$x_{k+1} \geq 0$$

$$y_1 = x_1 - 1$$

$$y_2 = x_2$$

$$\vdots$$

$$y_k = x_k$$

$$y_{k+1} = x_{k+1} = \# \text{ ακερ. λύσεων της } y_1 + y_2 + \dots + y_{k+1} = v - 1$$

$$\text{με } y_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, k+1$$

$$= \binom{k+1}{v-1}$$

$$= \binom{v+k-1}{v-1}$$

$$= \boxed{\binom{v+k-1}{k}}$$

Εκφώνηση $\rightarrow$ Λύση

$$\# \text{ συνδ. } v \text{ ανά } k \text{ του } \{x_1, x_2, \dots, x_k\} = \# \text{ ακερ. λύσεων της } x_1 + x_2 + \dots + x_{k+1} = v$$

χωρίς εναλλαγ. και χωρίς διαδ. σ.

$$\text{με } x_i \geq 1$$

$$x_2 \geq 2$$

$$\vdots$$

$$x_k \geq 2$$

$$x_{k+1} \geq 0$$

$$y_1 = x_1 - 1$$

$$y_i = x_i - 2, i = 2, \dots, k$$

$$y_{k+1} = x_{k+1}$$

$$= \# \text{ ακερ. λύσεων της } y_1 + y_2 + \dots + y_{k+1} = v - 2(k-1) - 1 = v - 2k + 1$$

$$\text{με } y_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, k+1$$

$$= \binom{k+1}{v-2k+1}$$

$$= \binom{k+1+v-2k+1-1}{v-2k+1}$$

$$= \binom{v-k+1}{v-2k+1}$$

$$= \boxed{\binom{v-k+1}{k}}$$

8) Lotto : Κλήρωση 6 σφαιριδίων χωρίς επανάληψη από το $\xi 1, 2, \dots, 49 \xi$

α) # ανοξεί. Lotto υπάρχουν

β) # ανοξεί. Lotto υπάρχουν χωρίς διαδ. σφαιρ.

α) $\binom{49}{6}$

β) (όπως η προηγ. ασκ.) $\Rightarrow \binom{49-6+1}{6} = \binom{44}{6}$
 $v=49$
 $k=6$ $\binom{v-k+1}{k}$

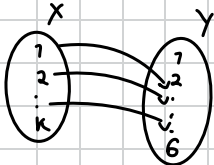
9) Ρίψη ζαριού k - φορές.

α) # ανοξεί.

β) # ανοξεί. όπου κάθε ζαριά είναι ≥ 1 αν' την προηγούμενη

αποτελεσμα = $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_k)$
 $\hookrightarrow 1^{\eta} \rho. \hookrightarrow 2^{\eta} \rho. \hookrightarrow 3^{\eta} \rho. \hookrightarrow \dots \hookrightarrow k^{\eta} \rho.$

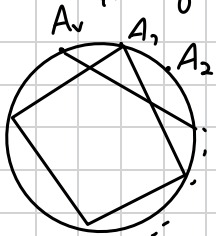
α) 6^k

β)  $= \# \text{ συναρτ. } f: \xi 1, \dots, k \xi \rightarrow \xi 1, 2, \dots, 6 \xi = \binom{6}{k}$
 αυξουσών
 (βλέπε ασκ. 7 φ. 11.)

10) v σημεία $A_1, \dots, A_v$ σε κύκλο

α) # διαφ. χορδών

β) # διαφ. κ-γώνων



α) $\binom{v}{2}$

β) $\binom{v}{k}$

11) # τοποθ. k κοριτσιών και v αγοριών σε σειρά:

α) χωρίς κορίτσια δίπλα-δίπλα

β) με κάποια κορίτσια δίπλα-δίπλα

γ) με όλα τα κορίτσια μαζί

α) Μια τοποθέτηση γίνεται σε σειρά:

1^η : Τοποθ. αγοριών σε σειρά $\rightarrow v!$ επιμ.

2^η : Τοποθ. 1^{ου} κοριτσιού $\rightarrow v+1$ επιμ.

3^η : Τοποθ. 2^{ου} >> $\rightarrow v$ επιμ.

⋮

$k+1$ ^η : Τοποθ. k ^{ου} >> $\rightarrow v+1-(k-1)$

$v+1-k+1$ επιμ.

$\Rightarrow$ Από αρχή : # τοποθ. $= v! (v+1)_k$

($v-1$ κενά και 2 θέσεις μπροστά πίσω)

$$= \frac{v! (v+1)!}{(v-k+1)!}$$

Β' ζρ.: $v! \binom{v+1}{k} k!$ $\rightarrow$ τοποθ. κοριτσιών

$\hookrightarrow$ επιλογή θέσεων για κορίτσια

β) Είναι το συμπλήρωμα του α)
 δηλ. # ζων. = $(v+k)! - v!(v+1)k$

γ) Μια τέτοια τοποθ. γίνεται σε στάδια:

1 $\underline{0}$: Τοποθ. κοριτσιών σε σειρά $\rightarrow k!$

2 $\underline{0}$: Τοποθ. αγοριών + μηλοκ κορ. $\rightarrow (v+1)!$

($k! \cdot v! \cdot (v+1)$
 $\hookrightarrow$ θέσεις)

$\Rightarrow$ Από πομπή αρχή: $\boxed{k! \cdot (v+1)!}$

12) # νόμιμο με αριθμούς 1 έως v

ανδ. με έναναι. v ανά 2

$$= \binom{v}{2} = \binom{v+2-1}{2} = \binom{v+1}{2} = \boxed{\frac{(v+1)v}{2}}$$

13) Πολυκατοικία με v ανδρόγυνα $(a_1, g_1) (a_2, g_2), \dots (a_v, g_v)$

α) # k -μελών συμβ. χωρίς περσορ.

β) $\gg$ με j ακριβώς γυν.

γ) $\gg$ χωρίς μέλη από το ίδιο ανδρόγυνο

α) $\binom{2v}{k}$

β) $\binom{v}{j} \binom{v}{k-j}$ $\xrightarrow{\text{γυναίκες} \rightarrow \text{άνδρες}}$

γ) $\sum_{j=0}^k \binom{v}{j} \binom{v-j}{k-j} = \sum_{j=0}^k \frac{v!}{j!(v-j)!} \cdot \frac{(v-j)!}{(k-j)!(v-k)!} = \frac{v!}{k!(v-k)!} \sum_{j=0}^k \frac{k!}{j!(k-j)!}$

$\rightarrow$ ή με πομπ. αρχή μετά α ή γ) $\left(\text{επιλ. } k \text{ ανδρ. και } \dots \right)$

$$= \binom{v}{k} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} = \boxed{\binom{v}{k} 2^k}$$