

Ασκ. 1) $X = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ $x_1 < x_2 < \dots < x_k$
 $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_v\}$ $y_1 < y_2 < \dots < y_v$
 # συναρτήσεις $f: X \rightarrow Y$

α) Χωρίς περιορ.

β) 1-1 ($v \geq k$)

γ) γν. αύξουσες ($v \geq k$, γτ πρέπει 1-1)

δ) αύξουσες

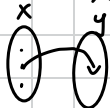
ε) αύξουσες και ενι ($k \geq v$ γτ όλα τα y πρέπει να ανήκουν)

στ) 1-1 και ενι ($v = k$)

ζ) ενι ($k \geq v$)

Λύση:

α) κάθε στ. του X που θα το στείλω;



Κάθε ζεύγος f περιγράφει από την διάταξη v ανά k με επανάληψη:

$(f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_k))$

Αρα $\boxed{v^k}$

β) Ίδια ιδέα με το α) αλλά χωρίς επανάληψη

$(f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_k))$
 $\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$
 $v \quad v-1 \quad (v-k+1)$

$\Rightarrow$ Άρα # διατ. = $v(v-1) \dots (v-k+1)$
 $= \boxed{\binom{v}{k}}$

γ) Πρέπει να βρω k τιμές από το Y , την μικρότερη θα την πάρει το $x_1 \dots$

Κάθε ζεύγος f περιγράφει από ένα υποσύνολο A του Y με k στοιχεία, γιατί το ελαχ. στ. του $A \rightarrow f(x_1)$

2° μικρ. $\rightarrow f(x_2)$

$\vdots$

$\Rightarrow$ Άρα # συν. = $\boxed{\binom{v}{k}}$

δ) Ίδια ιδέα με το γ) αλλά με επανάλ.

συν. = $\boxed{\binom{v}{k}}$

ε) Κάθε τέτοια f περιγρ. από έναν συνδυασμό A του y με k στοιχεία με επανά. που κάθε σ. του y εμφ. του. 1 φορά.

Άρα $\# \text{ συν.} = \# \text{ συνδυασμών του } y = \xi y_1, \dots, y_v \xi$ ανά k με επανά. που κάθε y_i εμφ. του. 1 φορά.

$= \# \text{ λύσεων της } x_1 + x_2 + \dots + x_v = k \text{ με } x_i \geq 1 \text{ για } i=1,2,\dots,v$

$$z_i = x_i - 1$$

$= \# \text{ λύσεων της } z_1 + z_2 + \dots + z_v = k - v \text{ με } z_i \geq 0 \text{ για } i=1,2,\dots,v$

$$= \begin{bmatrix} k-v \\ k-v \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} v+k-v-1 \\ k-v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k-1 \\ k-v \end{pmatrix}$$

στ) Ειδική περίστ. του β

$$\# \text{ συν.} = \boxed{v!}$$

ζ) Κάθε συνάρτηση τέτοιου τύπου είναι μια διατάξη του y ανά k με επανά.

$$(f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_k))$$

(όχι όλα τα σ.) $= (z_1, z_2, \dots, z_k)$ $z_i \in y, i=1,2,\dots,k$ όπου κάθε σ. εμφ. του. 1 φ.
 Άρα $\# \text{ συν.} = \# \text{ διατάξεων } v \text{ ανά } k \text{ του } y = \xi y_1, \dots, y_v \xi$ με επανά. όπου κάθε y_i εμφ. του. 1 φορά

Ιδέα 1: γεννήτριες διατάξεων

$$\text{Βήμα 1: } E_i(t, x_i) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(tx_i)^r}{r!}, \quad i=1,2,\dots,v$$

$$\text{Βήμα 2: } E_i(t) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{t^r}{r!} = e^t - 1$$

$$\text{Βήμα 3: } E(t) = E_1(t)E_2(t)\dots E_v(t) = (e^t - 1)^v \rightarrow \text{δυν. Νευτ.}$$

$$\text{Βήμα 4: } E(t) = \sum_{j=0}^v \binom{v}{j} (e^t)^j (-1)^{v-j} = \sum_{j=0}^v \binom{v}{j} e^{jt} (-1)^{v-j}$$

$$= \sum_{j=0}^v \binom{v}{j} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \right)^j (-1)^{v-j}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\sum_{j=0}^v (-1)^{v-j} \binom{v}{j} j^k}_{a_k} \frac{t^k}{k!} = \boxed{\sum_{j=0}^v (-1)^{v-j} \binom{v}{j} j^k}$$

Πρόβλημα 2: Αποδείξτε $E = A$

$\underline{0}$ = Διατάξεις v ανά k με έναν του y
 $A_i = \gg$ όπου το y : δεν εμφ.

$$\text{Άρα το \# συν.} = N(A_1 A_2 \dots A_v) = \sum_{r=0}^v (-1)^r S_{v,r}$$

$S_{v,0} = N(\underline{0}) = v^k$ # Διατ. v ανά k του y με έναν. όπου τα

$$S_{v,r} = \sum_{\substack{y_{i_1}, y_{i_2}, \dots, y_{i_r} \\ 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq v}} N(A_{i_1} A_{i_2} \dots A_{i_r}) \quad \underline{\text{δεν εμφ.}} = (v-r)^k$$

$$\Rightarrow S_{v,r} = \binom{v}{r} (v-r)^k$$

$$\Rightarrow \text{Άρα \# συν.} = v^k + \sum_{r=1}^v (-1)^r \binom{v}{r} (v-r)^k$$
$$= \boxed{\sum_{r=0}^v (-1)^r \binom{v}{r} (v-r)^k}$$

$$\begin{array}{l} \text{zis naivnei} \\ \text{avan. alla den nep.} \end{array} \Rightarrow \sum_{j=0}^v (-1)^{v-j} \binom{v}{v-j} j^k = \boxed{\sum_{j=0}^v (-1)^{v-j} \binom{v}{j} j^k}$$

Ασκ.2) # 6-ψηφίων αριθμών με άθροισμα ψηφίων

$$a) = 8$$

$$b) = 9$$

$$c) = 8$$

$$d) = 10$$

Λύση: α) 6-ψηφίος = $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$
αριθμός

$$1 \leq x_1 \leq 9$$

$$0 \leq x_i \leq 9, \quad i=2, \dots, 6$$

$$x_i \in \mathbb{Z}$$

6-ψηφίων με = # ακερ. λύσεων της

$$\text{αθρ. ψηφίων} = 8 \quad x_1 + \dots + x_6 = 8 \quad \text{με}$$

$$1 \leq x_1 \leq \cancel{9} \rightarrow \text{μόνο του ισχύει γτ. αθρ} = 8$$

$$0 \leq x_i \leq \cancel{9}, \quad i=2, \dots, 6$$

$$y_1 = x_1 - 1$$

$$= \# \text{ ακερ. λύσεων της } y_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_6 = 7 \quad \left. \begin{array}{l} \text{με } y_1, x_2, x_3, \dots, x_6 \geq 0 \end{array} \right\}$$

$$= \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \end{bmatrix} = \binom{6+7-1}{7} = \binom{12}{7} = 792$$

β) $x_1 + x_2 + \dots + x_6 = 9$ = # ακερ. λύσεων της

$$\text{με } 1 \leq x_1 \leq \cancel{9}$$

$$0 \leq x_i \leq \cancel{9}$$

$$y_1 + x_2 + \dots + x_6 = 8$$

$$\text{με } y_1, x_2, \dots, x_6 \geq 0$$

$$= \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix} = \binom{6+8-1}{8} = \binom{13}{8} = 1287$$

$$\gamma) x_1 + \dots + x_6 \leq 8$$

$$\text{με } 1 \leq x_1 \leq 9 \quad (\text{θα αναρτήσω αρχή } \in A)$$

$$0 \leq x_i \leq 8$$

$$= \sum_{r=0}^7 \binom{6}{r}$$

$$y_1 = x_1 + 1$$

$$y_1 + x_2 + \dots + x_6 \leq 7$$

$$y_1, x_2, \dots, x_6 \geq 0$$

$$\parallel$$

$$\# \text{ ακερ. λύσεων της}$$

$$y_1 + x_2 + \dots + x_6 = 7 = \begin{bmatrix} 7 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$\text{με } y_1, x_2, \dots, x_6 \geq 0$$

$$= \begin{pmatrix} 7+7-1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 13 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\delta) x_1 + \dots + x_6 = 10$$

$$\text{με } 1 \leq x_1 \leq 9$$

$$0 \leq x_i \leq 9$$

$$\left. \begin{array}{l} 1 \leq x_1 \leq 9 \\ 0 \leq x_i \leq 9 \end{array} \right\} \text{νεπινού αλφ.}$$

$$y_1 = x_1 - 1$$

$$= \# \text{ ακερ. λύσεων της } y_1 + x_2 + \dots + x_6 = 9$$

$$\text{με } 0 \leq y_1 \leq 8$$

$$0 \leq x_i \leq 9$$

$$= \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \end{bmatrix} - \textcircled{1} \rightarrow \text{λύση } (9, 0, 0, \dots, 0)$$

$$\parallel$$

$$\# \text{ ακερ. λύσεων } y_1 + x_2 + \dots + x_6 = 9$$

$$\text{με } y_1, \dots, x_6 \geq 0$$

Ασκ. 3) Λαχεία αριθμ. 1 έως v

Γίνεται κλήρωση

ο	$1^{\text{ος}}$	κερδίζει	100.000 €
οι	$2^{\text{ος}}, 3^{\text{ος}}, 4^{\text{ος}}$		10.000 €
	$5^{\text{ος}}, 6^{\text{ος}}, \dots, 10^{\text{ος}}$		1000 €

Πόσοι διαγ. τρόποι διανομής των χρημάτων υπάρχουν?

Λύση:

Κάθε τρόπος διανομής χρημάτων γίνεται σε στάδια:

$1^{\text{ος}}$ στ.	: Επιλ. λαχνού για τα	100.000 €	$\rightarrow v$ τρόποι
$2^{\text{ος}}$ στ.	: Επιλ. 3 λαχνών	10.000 €	$\rightarrow \binom{v-1}{3}$
$3^{\text{ος}}$ στ.	: $\gg$ 6 λαχνών	1000 €	$\rightarrow \binom{v-4}{6}$

Από πομπλική αρχή: $v \binom{v-1}{3} \binom{v-4}{6} = \boxed{\frac{v!}{1!3!6!(v-10)!}}$

Ασκ. 4-5-6) Ασάνσερ που ξεκινά από το ισόγειο για διανομή σε v ορόφους

- 4) $\neq$ τρόπων διανομής κ ατόμων
5) $\gg$ κ όμοιων κουτιών
6) $\gg$ κ όμοιων κουτιών με τουλ. 2 κουτιά σε κάθε όροφο ($k \geq 2v$)

Λύση:

Κατανομή κ σφαιριδίων σε v διακεκ. κελιά
 $\hookrightarrow$ άτομα ή κουτιά $\hookrightarrow$ ορόφοι

4) v^k

5) $\left[\begin{smallmatrix} v \\ k \end{smallmatrix} \right] \rightarrow$ από v ορ. επιλ. κ

6) $\left[\begin{smallmatrix} v \\ k-2v \end{smallmatrix} \right]$