

① Θέμα 48/ Φεβ. 2011

συνδ. με επανάληψη 3 ανά 100 του $\mathcal{O} = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$, όπου
 το $\omega_1 \rightarrow$ το ποσό 1 φορά
 $\omega_2 \rightarrow$ άπειρο γινόμενο αρ.
 $\omega_3 \rightarrow$ χωρίς περιορ.

Λύση:

Βήμα 1: $A_1(t, x_1) = (tx_1)^0 + (tx_1)^1$
 $A_2(t, x_2) = \sum_{r=0}^{\infty} (tx_2)^{2r}$
 $A_3(t, x_3) = \sum_{r=0}^{\infty} (tx_3)^r$

} Αναριθμήτριες

A' ζρ.

Βήμα 2: $A_1(t) = A_1(t, 1) = 1+t$
 $A_2(t) = A_2(t, 1) = \sum_{r=0}^{\infty} t^{2r} = \sum_{r=0}^{\infty} (t^2)^r = \frac{1}{1-t^2}$
 $A_3(t) = A_3(t, 1) = \sum_{r=0}^{\infty} t^r = \frac{1}{1-t}$

} Απολογοποιημένες Αναριθμήτριες

Βήμα 3: $A(t) = A_1(t)A_2(t)A_3(t) = (1+t) \cdot \frac{1}{1-t^2} \cdot \frac{1}{1-t}$
 $= \frac{1}{(1-t)^2} = (1-t)^{-2} \rightarrow$ Αρνητ. Συνν. αναντ.

Βήμα 4: $A(t) = (1-t)^{-2} = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} 2 \\ k \end{bmatrix} t^k$

} # συνδ. 3 ανά k με επαν. υπό τους περιορ.

Μας ενδιαφέρει το: $a_{100} = \begin{bmatrix} 2 \\ 100 \end{bmatrix}$
 $= \begin{bmatrix} 2+100-1 \\ 100 \end{bmatrix}$
 $= \underline{\underline{101}}$

$$\begin{aligned}
 \# \text{ συνδ. } 3 \text{ ανά } k &= \# \text{ συνδ. } 3 \text{ ανά } 100 + \# >> \\
 \text{υπό τους περιορ.} &\text{υπό τους περιορ. και} && \text{και το } w_1 \text{ επιφ.} \\
 &\text{το } w_2 \text{ επιφ. } 0 \text{ φορές} && 1 \text{ φορά} \\
 &= \sum_{k=0}^{50} \# \text{ συνδ.} && + \sum_{k=0}^{49} \# \text{ συνδ.} \\
 &\quad w_1 \rightarrow 0 && w_1 \rightarrow 1 \\
 &\quad w_2 \rightarrow 2k && w_2 \rightarrow 2k \quad 98 \\
 &\quad w_3 \rightarrow 100-2k && w_3 \rightarrow 99-2k \\
 &51 \text{ απ.} && 50 \text{ απ.} \\
 &= 101
 \end{aligned}$$

Β. ζρ.

② Θέμα 4 / 1 εντ. 2010

$a_k = \#$ διαζ. με εναν. των $v+2$ στ. του $\mathcal{O} = \{w_1, w_2, \dots, w_{v+2}\}$ ανά k , όπου $w_1, \dots, w_v$ επιφ. χωρίς περιορ. w_{v+1}, w_{v+2} επιφ. 0 ή 2 φορές

Λύση:

$$\begin{aligned}
 \text{Βήμα 1)} \quad E_i(t, x_i) &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(tx_i)^r}{r!} \quad i=1, \dots, v \\
 E_i(t, x_i) &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(tx_i)^0}{0!} + \frac{(tx_i)^2}{2!} \quad i=v+1, v+2
 \end{aligned}
 \left. \vphantom{\sum_{r=0}^{\infty}} \right\} \begin{array}{l} \text{Εκθετικές} \\ \text{Αναριθμήτριες} \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Βήμα 2: } E_i(t) &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{t^r}{r!} = e^t, \quad i=1, 2, \dots, v \\
 E_i(t) &= 1 + \frac{t^2}{2}, \quad i=v+1, v+2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Βήμα 3: } E(t) &= E_1(t) E_2(t) \dots E_{v+2}(t) \\
 &= (e^t)^v \left(1 + \frac{t^2}{2}\right)^2 \\
 &= e^{vt} \left(1 + t^2 + \frac{t^4}{4}\right)
 \end{aligned}$$

Εκθετική γεννήτρια
διατάξεων

Βήμα 4: $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{t^k}{k!} = E(t) = e^{vt} \left(1 + t^2 + \frac{t^4}{4}\right)$

* καλό είναι να
αλλάσω την
μεταβλητή

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(vt)^j}{j!} \left(1 + t^2 + \frac{t^4}{4}\right) \\
 &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{v^j t^j}{j!} + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{v^j t^{j+2}}{j!} + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{v^j t^{j+4}}{4j!} \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{v^k t^k}{k!} + \sum_{\substack{k=2 \\ j+2=k}}^{\infty} \frac{v^{k-2} t^k}{(k-2)!} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{v^{k-2} (k-1)k t^k}{(k-2)!(k-1)k} = k! \\
 &\quad + \sum_{k=4}^{\infty} \frac{v^{k-4}}{4} \cdot \frac{(k-3)(k-2)(k-1)k t^k}{(k-4)!(k-3)(k-2)(k-1)k} = \frac{v^{k-4}}{4} \cdot \frac{1}{k!}
 \end{aligned}$$

Άρα: $a_k = \begin{cases} v^k & k=0,1 \\ v^k + v^{k-2}(k-1)k & k=2,3 \\ v^k + v^{k-2}(k-1)k + \frac{v^{k-4}}{4}(k-3)(k-2)(k-1)k & k=4,5,\dots \end{cases}$

3) Θέμα 4 / Φεβ. 2010

α) $a_k = \#$ συνδ. v ανά k του $\underline{0} = \{w_1, \dots, w_v\}$ όπου κάθε σ. εμφ. πολ. 5 φορές
 β) $b_k = \#$ συνδ. v ανά k του $\underline{0} = \{w_1, \dots, w_v\}$ όπου κάθε σ. εμφ. 1 ή 3 φορές

Λύση:

Βήμα 1: $A_i(t, x_i) = \sum_{r=0}^{\infty} (tx_i)^r$, $i=1, 2, \dots, v$

Βήμα 2: $A_i(t) = \sum_{r=0}^{\infty} t^r = t^5 + t^6 + t^7 + \dots = t^5(1+t+t^2+\dots) = \frac{t^5}{1-t}$ $i=1, 2, \dots, v$

Βήμα 3: $A_1(t)A_2(t)\dots A_v(t) = \left(\frac{t^5}{1-t}\right)^v = t^{5v}(1-t)^{-v}$

Βήμα 4: $\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k = A(t) = t^{5v} \sum_{j=0}^{\infty} \binom{v}{j} t^j = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{v}{j} t^{j+5v} = k$
 $= \sum_{k=5v}^{\infty} \binom{v}{k-5v} t^k$

Άρα $a_k = \begin{cases} 0 & 0 \leq k \leq 5v-1 \\ \binom{v}{k-5v} & k \geq 5v \end{cases}$

β) Βήμα 1: $A_i(t, x_i) = (tx_i)^1 + (tx_i)^3$, $i=1, 2, \dots, v$

Βήμα 2: $A_i(t) = t + t^3 = t(1+t^2)$

Βήμα 3: $A(t) = A_1(t)A_2(t)\dots A_v(t) = [t(1+t^2)]^v = t^v(1+t^2)^v$

Βήμα 4: $\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k = t^v \sum_{j=0}^v \binom{v}{j} (t^2)^j = \sum_{j=0}^v \binom{v}{j} t^{2j+v} = k$

$a_k = \begin{cases} \binom{v}{\frac{k-v}{2}} & k=v, v+2, v+4, v+6, \dots, 3v \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$

$* = \binom{v}{0} t^v + \binom{v}{1} t^{v+2} + \binom{v}{2} t^{v+4}$

④ Θέμα 38 / 2 εντ. 2009

$D(v, k) = \# \text{ συνδ. του } \mathcal{O} = \{1, 2, \dots, 3v+1\}$ ανά k όνου

$1, 2, \dots, v \rightarrow$ άπειρο ημίθλος φορές

$v+1, v+2 \rightarrow$ το πολύ 1 φορά

$D'(v, k) = \# \text{ συνδ. του } \mathcal{O}' = \{1, 2, \dots, 2v+1\}$ ανά k όνου

$1, 2, \dots, v \rightarrow$ χωρίς περιορισμό

$v+1, v+2, \dots, 2v+1 \rightarrow$ το πολύ 1 φορά

NSO : $D(v, k) = D'(v, k)$

Λύση: 2 ακολουθίες είναι ίσες αν οι γεννήτριες τους είναι ίσες °

$$\text{Έστω } D(t) = \sum_{k=0}^{\infty} D(v, k) t^k$$

$$\begin{array}{l} \text{Για NSO } D(v, k) = D'(v, k) \\ \text{αρκεί } D(t) = D'(t) \end{array}$$

$$D'(t) = \sum_{k=0}^{\infty} D'(v, k) t^k$$

Για $D(t)$:

$$\text{Βήμα 1: } A_i(t, x_i) = \sum_{r=0}^{\infty} (t x_i)^{2r}, \quad i = 1, 2, \dots, v$$

$$A_i(t, x_i) = (t x_i)^0 + (t x_i)^1, \quad i = v+1, v+2, \dots, 3v+1$$

$$\text{Βήμα 2: } A_i(t) = \sum_{r=0}^{\infty} t^{2r} = \frac{1}{1-t^2}, \quad i = 1, 2, \dots, v$$

$$A_i(t) = 1+t, \quad i = v+1, v+2, \dots, 3v+1$$

$$\text{Βήμα 3: } D(t) = A_1(t) A_2(t) \dots A_{3v+1}(t) = \left(\frac{1}{1-t^2} \right)^v (1+t)^{2v+1}$$

Για $D'(t)$:

$$\text{Βήμα 1: } A'_i(t, x_i) = \sum_{r=0}^{\infty} (t x_i)^r, \quad i = 1, 2, \dots, v$$

$$A'_i(t, x_i) = (t x_i)^0 + (t x_i)^1, \quad i = v+1, v+2, \dots, 2v+1$$

$$\text{Βήμα 2: } A'_i(t) = \sum_{r=0}^{\infty} t^r = \frac{1}{1-t}, \quad i = 1, 2, \dots, v$$

$$A'_i(t) = 1+t, \quad i = v+1, v+2, \dots, 2v+1$$

Βήμα 3: $D'(t) = A_1'(t)A_2'(t) \dots A_{2v+1}'(t)$

$$D(t) = \left(\frac{1}{1-t^2} \right)^v (1+t)^{2v+1}$$

$$D'(t) = \left(\frac{1}{1-t^2} \right)^v (1+t)^{v+1}$$

5 Θέμα 4 / Π.Ε.Β. 2002

$R(v, k) = \#$ συνδ. v ανά k με εναν. του $\underline{0} = \xi w_1, \dots, w_n \}$ όπου κάθε στ. εμφ. το n γύ 3 φορές.

α) Να υπολογ. η γεννήτρια $R(v, k) = \sum_{k=0}^{\infty} R(v, k) t^k$

β) Να αποδειχθεί η αναδρ. σχέση

$$R(v+1, k) = R(v, k) + R(v, k-1) + R(v, k-2) + R(v, k-3), \quad k \geq 3 \text{ με απρ. συν.}$$

$$R(v, 0) = \begin{bmatrix} v \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$R(v, 1) = \begin{bmatrix} v \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$R(v, 2) = \begin{bmatrix} v \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$R(v, 3) = \begin{bmatrix} v \\ 3 \end{bmatrix}$$

Λύση.

Βήμα 1: $A_i(t, X_i) = (tX_i)^0 + (tX_i)^1 + (tX_i)^2 + (tX_i)^3, \quad i=1, 2, \dots, v$

Βήμα 2: $A_i(t, X_i) = 1 + t + t^2 + t^3, \quad i=1, 2, \dots, v$

Βήμα 3: $R_v(t) = \prod_{i=1}^v A_i(t) = (1+t+t^2+t^3)^v \rightarrow \underline{\underline{\alpha}}$

β) $\sum_{k=0}^{\infty} R(v+1, k) t^k = (1+t+t^2+t^3)^{v+1} = (1+t+t^2+t^3) R_v(t)$

$$= (1+t+t^2+t^3) \sum_{j=0}^{\infty} R(v, j) t^j$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} R(v, j) t^{\textcircled{0}} + \sum_{j=0}^{\infty} R(v, j) t^{\textcircled{1}} + \sum_{j=0}^{\infty} R(v, j) t^{\textcircled{2}} + \sum_{j=0}^{\infty} R(v, j) t^{\textcircled{3}}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} R(v, k) t^k + \sum_{k=1}^{\infty} R(v, k-1) t^k + \sum_{k=2}^{\infty} R(v, k-2) t^k + \sum_{k=3}^{\infty} R(v, k-3) t^k$$

$$\Rightarrow R(v+1, k) = \begin{cases} R(v, k) & , k=0 \\ R(v, k) + R(v, k-1) & , k=1 \\ R(v, k) + R(v, k-1) + R(v, k-2) & , k=2 \\ R(v, k) + R(v, k-1) + R(v, k-2) + R(v, k-3) & , k \geq 3 \end{cases}$$