

① Παράδειγμα ηρωγ. μαθ.

$a_k = \# \text{ συνδ. } 4 \text{ ανά } k \text{ του } \mathcal{O} = \{w_1, w_2, w_3, w_4\} \text{ με επανάλ. } \emptyset \text{ του}$

w_1 επιτρ. να εμφ. 1 ή 2 ή 3 φ.

$w_2 \gg 0 \text{ ή } 2$

$w_3 \gg 0 \text{ ή } 1$

$w_4 \gg 2$

$b_k = \# \text{ διατ.}$

Λύση: Για το a_k :

$$A_1(t, x_1) = (tx_1)' + (tx_1)^2 + (tx_1)^3$$

$$A_2(t, x_2) = (tx_2)^0 + (tx_2)^2$$

$$A_3(t, x_3) = (tx_3)^0 + (tx_3)^1$$

$$A_4(t, x_4) = (tx_4)^2$$

Θέλω να επεκτείνω
την ιδέα στις
διατάξεις

$$\prod_{i=1}^4 A_i(t, x_i) = t^3 \underbrace{x_1^3 x_4^2}_{\substack{\xi w_1, w_4, w_4 \\ 2!}} + t^4 \underbrace{x_1^2 x_3^2 x_4^2}_{\substack{\xi w_1, w_1, w_1, w_2, w_2, w_3, w_4, w_4 \\ 8! \\ 3! 2! 2!}} + \dots + t^5 \underbrace{x_1^3 x_2^2 x_3 x_4^2}_{\substack{\xi w_1, w_1, w_1, w_2, w_2, w_3, w_4, w_4 \\ 8! \\ 3! 2! 2!}}$$

Αν καταφέρνουμε μπροστά από κάθε μονώνυμο να εμφ. το $\#$ διατ. που δίνει
ο συνδυασμός θα βάζαμε $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = t$
& $b_k = \text{συντ. του } t^k$

Ο συντελ. που πρέπει να εμφ. μπροστά αν το $t^k x_1^{k_1} x_2^{k_2} x_3^{k_3} x_4^{k_4}$ είναι ο $\frac{k!}{k_1! k_2! k_3! k_4!}$

$$\text{Θα ήθελα: } t^3 \frac{x_1^3}{1!} \frac{x_4^2}{2!} + t^4 \frac{x_1^2}{1!} \frac{x_3^2}{1!} \frac{x_4^2}{4!} + t^5 \frac{x_1^3}{1!} \frac{x_2^2}{2!} \frac{x_3}{2!} \frac{x_4^2}{2!}$$

Για να εμφ. τα παραγοντικά κάθω ορίζω τις εκθετικές αναριθμήτριες

$$E_1(t, x_1) = \frac{(tx_1)^0}{1!} + \frac{(tx_1)^1}{2!} + \frac{(tx_1)^3}{3!}$$

$$E_2(t, x_2) = \frac{(tx_2)^0}{0!} + \frac{(tx_2)^2}{2!}$$

$$E_3(t, x_3) = \frac{(tx_3)^0}{0!} + \frac{(tx_3)^1}{1!}$$

$$E_4(t, x_4) = \frac{(tx_4)^2}{2!}$$

Τότε: $\prod_{i=1}^4 \epsilon_i(t, x_i) = t^3 \frac{1 \cdot 3!}{3! 1! 2!} x_1^2 x_4^2 + t^4 \frac{1 \cdot 4!}{4! 1! 1! 2!} x_1^2 x_3^2 x_4^2 + \dots + t^8 \frac{1 \cdot 8!}{8! 3! 2! 1! 2!} x_1^3 x_2^2 x_3^2 x_4^2$

$\hookrightarrow$ Διαζ. με 3 σ. $\hookrightarrow$ Διαζ. με 4 σ. $\hookrightarrow$ Διαζ. με 8 σ.

Αν βάλω $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1$, τότε $\theta_k =$ συντελ. του $t^k/k!$

② Γενική διαδικασία

$\theta_k = \#$ διαζ. ν ανά k του $\mathcal{O} = \{w_1, \dots, w_n\}$ με επαν. που το w_i επιτρ. να εμφ. $r_i \in A_i$ φορές, $i=1, 2, \dots, n$

Βήμα 1: $\epsilon_i(t, x_i) = \sum_{r_i \in A_i} \frac{(t x_i)^{r_i}}{r_i!} \rightarrow 1^{\text{η}} \text{ Αλλαγή από διαδικ. συνδ. Εκθετική αναρίθμηση}$

Βήμα 2: $\epsilon_i(t) = \epsilon_i(t, 1)$ Αποδοσιών εκθ. αναρ.θ.

Βήμα 3: $\epsilon(t) = \epsilon_1(t) \epsilon_2(t) \dots \epsilon_r(t)$ Γεννήτρια διαζ.

Βήμα 4: $\epsilon(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \theta_k \frac{t^k}{k!} \rightarrow 2^{\text{η}} \text{ Αλλαγή}$
 $\hookrightarrow \theta_k = \#$ διαζ. ν ανά k

③ Βασικές γεννήτριες

$$\sum_{k=0}^{\infty} t^k = \frac{1}{1-t}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{v}{k} t^k = (1+t)^v$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{v}{k} t^k = (1-t)^{-v}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} = e^t$$

④ Γνωστοί τύποι

1. # Διατ. v ανά κ χωρίς εναν.

Βήμα 1: $E_i(t, x_i) = \frac{(tx_0)^0}{0!} + \frac{(tx_1)^1}{1!} \dots \text{Εκθ. αναρθ. } i=1, 2, \dots, v$

Βήμα 2: $E_i(t) = E_i(t, 1) = 1+t, \quad i=1, 2, \dots, v$

Βήμα 3: $E(t) = E_1(t)E_2(t) \dots E_v(t)$
 $= (1+t)^v$ Γεννήτρια Διατ.

Βήμα 4: $E(t) = (1+t)^v = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{v}{k} t^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{v!}{k!} \frac{t^k}{(v-k)!} \rightarrow = \theta_k = \# \text{ Διατ. v ανά κ}$
 ↓
 Θέλουμε να εμφ. $1/k!$

$$\theta_k = \begin{cases} \frac{v!}{k!(v-k)!}, & k \leq v \\ 0, & k > v \end{cases}$$

2. # διαζ. v ανά κ με έναυσ.

Βήμα 1: $E_i(t, x_i) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(tx_i)^r}{r!}$

Βήμα 2: $E_i(t) = E_i(t, 1) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{t^r}{r!} = e^t$

Βήμα 3: $E(t) = E_1(t)E_2(t)\dots E_v(t) = (e^t)^v = e^{vt}$ Γεννήτρια διαζ.

Βήμα 4: $E(t) = e^{vt} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(vt)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{v^k}_{\beta_k} \frac{t^k}{k!} \Rightarrow \beta_k = \# \text{ διαζ. v ανά κ με έναυσ.}$

5 Θέμα 4 / Μαρ. 2012

$\alpha_k = \#$ συνδ. $v+1$ ανά κ του $\mathcal{O} = \{w_0, w_1, w_2, \dots, w_v\}$ όπου το w_0 επιτρέπεται μόνο άπειρο αριθμό φορών ενώ τα υπόλ. χωρίς περιορ.

$A(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k t^k$ Γεννήτρια συνδ.

$\beta_k = \#$ διαζ. $v+1$ ανά κ

$B(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \frac{t^k}{k!}$ Εκθετική γεννήτρια διαζ.

Βήμα 1: $A_0(t, x_0) = (tx_0)^0 + (tx_0)^2 + (tx_0)^4 + \dots = \sum_{r=0}^{\infty} (tx_0)^{2r}$

$A_i(t, x_i) = (tx_i)^0 + (tx_i)^1 + (tx_i)^2 + \dots = \sum_{r=0}^{\infty} (tx_i)^r \quad i=1, 2, \dots, v$

Βήμα 2: $A_0(t) = A_0(t, 1) = \sum_{r=0}^{\infty} t^{2r} = \sum_{r=0}^{\infty} (t^2)^r = \frac{1}{1-t^2}$

$A_i(t) = A_i(t, 1) = \sum_{r=0}^{\infty} t^r = \frac{1}{1-t} \quad i=1, 2, \dots, v$

Βήμα 3: $A(t) = A_0(t)A_1(t)A_2(t)\dots A_v(t) = \frac{1}{1-t^2} \cdot \frac{1}{(1-t)^v} = \frac{1}{1+t} (1-t)^{-(v+1)}$

Βήμα 4: $A(t) = \frac{1}{1+t} (1-t)^{-(v+1)} \sum_{i=0}^{\infty} \underbrace{(-1)^i}_{\beta_i} t^i \sum_{j=0}^{\infty} \underbrace{\binom{v+1}{j}}_{\gamma_j} t^j \Rightarrow \alpha_k = \sum_{i=0}^k \beta_i \gamma_{k-i} = \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{v+1}{k-i}$

$$\text{Βήμα 1: } E_0(t, x_0) = \frac{(tx_0)^0}{0!} + \frac{(tx_0)^2}{2!} + \frac{(tx_0)^4}{4!} + \dots = \sum_{r \text{ άρτιος}} \frac{(tx_0)^r}{r!}$$

$$E_i(t, x_i) = \frac{(tx_i)^0}{0!} + \frac{(tx_i)^2}{2!} + \frac{(tx_i)^4}{4!} + \dots = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(tx_i)^r}{r!} \quad i=1, 2, \dots, v$$

$$\text{Βήμα 2: } E_0(t) = \sum_{r \text{ άρτιος}} \frac{t^r}{r!} = \frac{t^0}{0!} + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + \dots$$

$$\begin{aligned} \text{Έστω } S_a &= \sum_{r \text{ άρτιος}} \frac{t^r}{r!} \\ S_n &= \sum_{r \text{ περιτ.}} \frac{t^r}{r!} \end{aligned} \quad \left. \begin{aligned} S_a + S_n &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{t^r}{r!} = e^t \\ S_a - S_n &= \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{t^r}{r!} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-t)^r}{r!} = e^{-t} \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow E_0(t) = \sum_{r \text{ άρτιος}} \frac{t^r}{r!} = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$$

$$E_0(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$$

$$E_i(t) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{t^r}{r!} = e^t, \quad i=1, 2, \dots, v$$

$$\text{Βήμα 3: } E(t) = E_0(t) E_1(t) \dots E_v(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2} (e^t)^v$$

$$\text{Βήμα 4: } E(t) = \frac{1}{2} (e^t + e^{-t}) e^{vt}$$

$$= \frac{1}{2} (e^{(v+1)t} + e^{(v-1)t})$$

$$= \frac{1}{2} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{[(v+1)t]^k}{k!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[(v-1)t]^k}{k!} \right)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2} \left[(v+1)^k + (v-1)^k \right] \frac{t^k}{k!}$$

$\theta_k = \#$ διαζ. $(v+1)$ ανά k με τους συγκ. νερ.

6 Θέμα 4α / Φεβ. 2017

$\theta_k = \#$ Εναν. διατάξεων των $v+2$ στοιχείων του $\underline{O} = \{w_1, w_2, \dots, w_v, w_{v+1}, w_{v+2}\}$ ανά k
 όπου $w_1, w_2, \dots, w_v \rightarrow$ χωρίς περ.
 $w_{v+1}, w_{v+2} \rightarrow$ τουλ. 1 φορά

Λύση:

Βήμα 1: $E_i(t, x_i) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(t x_i)^r}{r!} \quad i=1, 2, \dots, v$
 $E_i(t, x_i) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(t x_i)^r}{r!} \quad i=v+1, v+2$
 αναγ. να εμπ. ο πορὸς

Βήμα 2: $E_i(t) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{t^r}{r!} = e^t, \quad i=1, 2, \dots, v$
 $E_i(t) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{t^r}{r!} = e^t - 1, \quad i=v+1, v+2$

Βήμα 3: $E(t) = E_1(t) E_2(t) \dots E_{v+1}(t) E_{v+2}(t)$
 $= (e^t)^v (e^t - 1)^2$

Βήμα 4: $E(t) = e^{vt} (e^{2t} - 2e^t + 1)$
 $= e^{vt} (e^{2t} - 2e^t + 1)$
 $= e^{t(v+2)} - 2e^{t(v+1)} + e^{vt} = \sum_{k=0}^{\infty} (v+2)^k \frac{t^k}{k!} - 2 \sum_{k=0}^{\infty} (v+1)^k \frac{t^k}{k!} + \sum_{k=0}^{\infty} v^k \frac{t^k}{k!}$
 $= \sum_{k=0}^{\infty} [(v+2)^k - 2(v+1)^k + v^k] \frac{t^k}{k!}$

Εναλλακτ. λύση: Αρχή C-A

$\underline{O}$: διατ. $v+2$ ανά k του $\{w_1, \dots, w_{v+2}\}$ με Εναν.

A_1 : διατ. του $\underline{O}$ που το w_{v+1} δεν εμπ.

A_2 : διατ. του $\underline{O}$ που το w_{v+2} δεν εμπ.

$\theta_k = \#$ στοιχ. διατ.
 v ανά k

$$\begin{aligned}
 \# \text{ Znsatz. } \delta_{\text{ax.}} &= N(A_1 A_2) \\
 &= N(\underbrace{\emptyset}) - N(\underbrace{A_1}) - N(\underbrace{A_2}) + N(\underbrace{A_1 A_2}) \\
 &= (v+2)^k - (v+1)^k - (v+1)^k + v^k
 \end{aligned}$$