

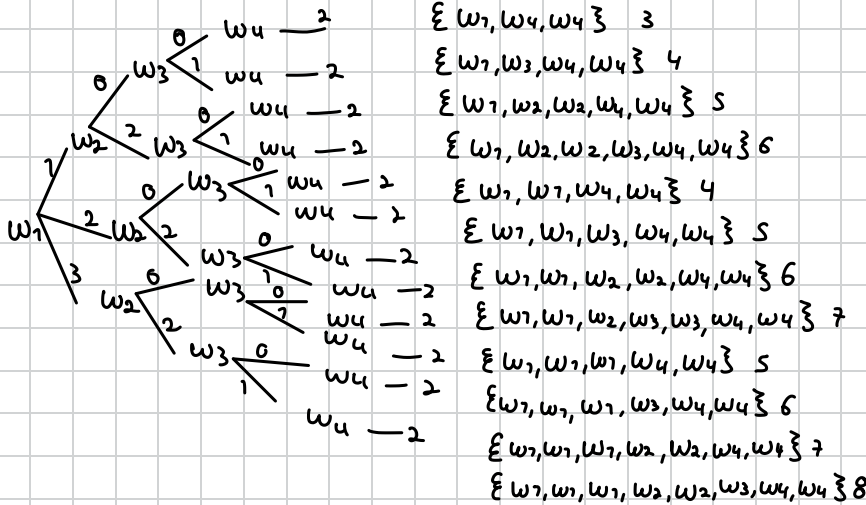
① Βασικό πρόβλημα

συνδυασμών v ανά k του $\Omega = \{w_1, w_2, \dots, w_v\}$ με επανάληψη, όπου το w_i επηρέεται να εμφανίζεται v_i φορές με $v_i \in A_i$, $i=1, 2, \dots, v$
 $\hookrightarrow$ δοσμένα σύνολα

② Παράδειγμα

συνδυασμών 4 ανά k του $\Omega = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ όπου w_1 εμφ. 1 ή 2 ή 3 φορές
 w_2 εμφ. 0 ή 2 φορές
 w_3 εμφ. το πολύ 1 φορά
 w_4 εμφ. ακριβώς 2 φορές

($A_1 = \{1, 2, 3\}$, $A_2 = \{0, 2\}$, $A_3 = \{0, 1\}$, $A_4 = \{2\}$)



$\Rightarrow$

k	a_k
0	0
1	0
2	0
3	1
4	2
5	3
6	3
7	2
8	1

③ "Αλγεβροποίηση" της διαδικασίας

$$w_i \longleftrightarrow x_i$$

εμφ. του $w_i \longleftrightarrow$ ποσυν. του x_i

Δέντρο συνδυα. $\longleftrightarrow$ πολλ/μός ποσυν.

$$w_i \longleftrightarrow x_i, \quad i=1,2,3,4$$

$$\begin{aligned} & (x_1^1 + x_1^2 + x_1^3) \cdot (x_2^0 + x_2^2) \cdot (x_3^0 + x_3^1) \cdot x_4^2 \\ &= (x_1 + x_1^2 + x_1^3)(1 + x_2^2)(1 + x_3)x_4^2 \\ &= x_1 x_4^2 + x_1 x_3 x_4^2 + x_1 x_2^2 x_4^2 + \dots + x_1^3 x_2^2 x_3 x_4^2 \end{aligned}$$

1 φορά w_1 $\swarrow$ 1 φορά w_1
2 φορές w_4 1 φορά w_3
2 φορές w_4

④ "Αλγεβροποίηση" της διαδικασίας

Κάθε μονώνυμο αντιστοιχεί σε 1 συνδυασμό.

π.χ. $x_1 x_2^2 x_4^2 \longleftrightarrow \{w_1, w_2, w_2, w_4, w_4\}$

Θα ήθελα καθώς να "μαρκάρω" κάθε μονώνυμο-συνδυασμό με το # των στοιχείων του

Ιδέα: Κάνω την διαδικασία αλλά με τα $t x_i$ στη θέση του x_i

$$\begin{aligned} & ((t x_1)^1 + (t x_1)^2 + (t x_1)^3)((t x_2)^0 + (t x_2)^2)((t x_3)^0 + (t x_3)^1)(t x_4)^2 \\ &= t^3 x_1 x_4^2 + t^4 x_1 x_3 x_4^2 + \dots + t^8 x_1^3 x_2^2 x_3 x_4^2 \end{aligned}$$

Δεν με ενδιαφέρει ποιοι είναι οι συνδ. αλλά πόσοι είναι. Οπότε βάζω $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1$ και ο συντελ. του t^k είναι το ακ.

Οπότε για το αρχικό πρόβλημα αρκεί

$$\begin{aligned} & (t^1 + t^2 + t^3)(t^0 + t^2)(t^0 + t^1)t^2 \\ &= t^3(1 + t + t^2)(1 + t^2)(1 + t) \\ &= t^3(1 + t + t^2)(1 + t + t^2 + t^3) \\ &= t^3(1 + 2t + 3t^2 + 3t^3 + 2t^4 + t^5) \\ &= 7t^3 + 2t^4 + 3t^5 + 3t^6 + 2t^7 + 1t^8 \end{aligned}$$

5 Γενική Διαδικασία

$a_k = \# \text{ συνδ. } v \text{ ανά } k \text{ με εναν. του } \omega; \text{ εμπ. } r_i \in A; \text{ γράφει}$

Βήμα 1: $A_i(t, x_i) = \sum_{r_i \in A_i} (t x_i)^{r_i}$ Αναριθ. συνάρτηση του ω_i

Βήμα 2: $A_i(t) = A_i(t, 1)$ Αριθμ. αναριθ. του ω_i

Βήμα 3: $A(t) = A_1(t) A_2(t) \dots A_n(t)$
 $\hookrightarrow$ Γεννήτρια

Βήμα 4: $A(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k \rightarrow \# \text{ ζήτημ. συνδυασμών}$

6 Εργασία για το βήμα 4:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{v}{k} t^k = (1+t)^v$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} t^k = \frac{1}{1-t} \quad |t| < 1$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{v}{k} t^k = (1-t)^{-v}, \quad |t| < 1$$

$$A(t) = B(t) \Gamma(t) \Leftrightarrow a_k = b_0 \gamma_k + b_1 \gamma_{k-1} + \dots + b_k \gamma_0 = \sum_{i=0}^k b_i \gamma_{k-i}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k = \sum_{k=0}^{\infty} b_i t^i \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_j t^j$$

$$\text{π.χ. } (1+t)^{r+s} = (1+t)^r (1+t)^s$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{r+s}{k} t^k = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{r}{i} t^i \sum_{j=0}^{\infty} \binom{s}{j} t^j \hookrightarrow a_k = \sum_{i=0}^k b_i \gamma_{k-i}$$

$$\Rightarrow \binom{r+s}{k} = \sum_{i=0}^k \binom{r}{i} \binom{s}{k-i} \quad \text{Τύπος Cauchy}$$

7) Γνωστά ανομογενή

1. # συσ. v ανακ (χρησις εναν.) = $\alpha_k = ?$

$$A_i = \{0, 1\}, \quad i = 1, 2, \dots, v$$

Πήμα 1: $A_i(t, x_i) = (tx_i)^0 + (tx_i)^1, \dots, i = 1, 2, \dots, v$

Πήμα 2: $A_i(t) = A_i(t, 1) = 1 + t, \quad i = 1, 2, \dots, v$

Πήμα 3: $A(t) = A_1(t)A_2(t)\dots A_v(t) = (1+t)^v$

Πήμα 4: $A(t) = (1+t)^v = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{v}{k} t^k \rightarrow$ # συσ. v ανακ α_k

2. # συσ. v ανακ με εναν. = $\alpha_k = ?$

$$A_i = \{0, 1, 2, \dots\} \quad i = 1, 2, \dots, v$$

Πήμα 1: $A_i(t, x_i) = \sum_{r=0}^{\infty} (tx_i)^r, \quad i = 1, 2, \dots, v$

Πήμα 2: $A_i(t) = A_i(t, 1) = \sum_{r=0}^{\infty} t^r = \frac{1}{1-t}, \quad i = 1, 2, \dots, v$

Πήμα 3: $A(t) = A_1(t)A_2(t)\dots A_v(t) = \left(\frac{1}{1-t}\right)^v$

Πήμα 4: $A(t) = \left(\frac{1}{1-t}\right)^v = (1-t)^{-v} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{v}{k} t^k \rightarrow \alpha_k$

8 Θέμα 4 / 5 εντ. 2012

$a_k = \#$ εναν. συνδ. των $v+2$ στοιχείων του $\Omega = \xi\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{v+1}$ ανά k , όπου το ω_0 επιερ. περτζό αριθμό φορών ω_{v+1} επιερ. 1 ή 2 φορές
 τα υπόλοιπα οσέδῃνοσε φορές.

Βήμα 1: $A_0(t, x_0) = \sum_{r \in \mathbb{N}} (tx_0)^r$

$A_i(t, x_i) = \sum_{r=0}^{\infty} (tx_i)^r \quad i=1, 2, \dots, v$

$A_{v+1}(t, x_{v+1}) = (tx_{v+1})^1 + (tx_{v+1})^2$ φτιάχνω την αναρθ. του κάθε στοιχείου

Βήμα 2: $A_0(t) = \sum_{r \in \mathbb{N}} t^r = t^1 + t^3 + t^5 + \dots$
 $= t(1 + t^2 + t^4 + t^6 + \dots)$
 $= t \left(\frac{1}{1-t^2} \right) \rightsquigarrow \sum_{k=0}^{\infty} t^k = \frac{1}{1-t}$

$A_i(t) = \sum_{r=0}^{\infty} t^r = \frac{1}{1-t}$

$A_{v+1}(t) = t + t^2$

Αντικαθιστώ τις αναρ.

Βήμα 3: $A(t) = A_0(t)A_1(t)A_2(t) \dots A_v(t)A_{v+1}(t)$

$= t \cdot \frac{1}{1-t^2} \cdot \frac{1}{(1-t)^v} \cdot t(1+t)$

$= \frac{t^2}{(1-t)(1-t)^v} = \frac{t^2}{(1-t)^{v+1}} = \boxed{t^2(1-t)^{-(v+1)}}$

Προσν. να αναρζ. την $A(t)$ ως προς δυνάμεις του t για να βρω συνεξί.

Βήμα 4: $\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k = A(t) = t^2(1-t)^{-(v+1)}$

$= t^2 \sum_{j=0}^{\infty} \binom{v+1}{j} t^j = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{v+1}{j} t^{\overset{j+2}{\underset{k}{\text{"k"}}}}$
 $= \left(\binom{v+1}{0} t^2 + \binom{v+1}{1} t^3 + \binom{v+1}{2} t^4 + \dots \right)$
 $= \sum_{k=2}^{\infty} \binom{v+1}{k-2} t^k$

Άρα:

$$a_k = \begin{cases} 0 & k=0,1 \\ \binom{2v+1}{k-2} & k \geq 2 \end{cases}$$

9) Θέμα 4 / Ιαν. 2011

$a_k = \#$ εναν. συνδ. των $2v+2$ στοιχείων του $\mathcal{O} = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{2v+2}\}$ ανά k ,
όπου $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{2v+1}$ εμφ. το ποσό 1 φορά το καθένα
 ω_{2v+2} ενισχεν. άρτιο αριθμό φορές

α) Γεννήτρια $\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k = A(t)$

β) $a_k - a_{k-1} = ? \quad k \geq 1$

γ) $a_v = ?$

Βήμα 1: $A_i(t, x_i) = (tx_i)^0 + (tx_i)^1, \quad i=1, 2, \dots, 2v+1$

$$A_{2v+2}(t, x_{2v+2}) = \sum_{r \text{ άρτιος}} (tx_{2v+2})^r$$

Βήμα 2: $A_i(t) = 1+t, \quad i=1, 2, \dots, 2v+1$

$$A_{2v+2}(t) = 1+t^2+t^4+\dots = \frac{1}{1-t^2}$$

Βήμα 3: $A(t) = A_1(t)A_2(t)\dots A_{2v+2}(t) = (1+t)^{2v+1} \cdot \frac{1}{1-t^2}$

$$= \frac{(1+t)^{2v}}{1-t} = \boxed{(1+t)^{2v}(1-t)^{-1}} \quad \alpha)$$

Βήμα 4: $\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k = \sum_{i=0}^{\infty} \underbrace{\binom{2v}{i}}_{\theta_i} t^i \sum_{j=0}^{\infty} \underbrace{t^j}_{\delta_j}$
 $\Rightarrow a_k = \sum_{i=0}^k \theta_i \delta_{k-i} = \sum_{i=0}^k \binom{2v}{i}$

$$\Rightarrow a_k - a_{k-1} = \boxed{\binom{2v}{k}} \quad \beta)$$

$$\gamma) \quad a_v = \sum_{i=0}^v \binom{2v}{i} = \binom{2v}{0} + \binom{2v}{1} + \dots + \binom{2v}{v}$$

Δείξε τελευταίο μάθημα
στα αθροίσματα
(αθρ. με συμμετρία)