

① Αρχή Εγκλεισμού - Αποκλεισμού

$$A_1, A_2, \dots, A_v \subseteq \mathcal{O}$$

$$N(\bigcup_{i=1}^v A_i) = \sum_{r=1}^v (-1)^{r-1} S_{v,r}$$

$$N(\bigcap_{i=1}^v A_i) = \sum_{r=1}^v (-1)^r S_{v,r}$$

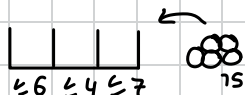
$$S_{v,0} = N(\mathcal{O})$$

$$r = 1, 2, \dots, v$$

$$S_{v,r} = \sum_{\{i_1, i_2, \dots, i_r\} \subseteq \{1, 2, \dots, v\}} N(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_r}) = \binom{v}{r} n_r$$

② Κατανομές ομοίων σφαιριδίων σε διακεκ. κελιά πέτερ χωρητ.

τρόπων κατανομής 15 ομοίων σφαιρ. σε 3 διακεκ. κελιά χωρητικ. 6, 4 και 7 = ?



||

ακερ. λύσεων της εξίσ. $x_1 + x_2 + x_3 = 15$
με περιορ. $x_1 \leq 6$
 $x_2 \leq 4$
 $x_3 \leq 7$

(δομείνω με τσμέσ συμψηφισμάτων)

Λύση:

$$\mathcal{O} = \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{Z}^3 : x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \}$$

$$A_1 = \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{O} : x_1 \geq 7, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \}$$

$$A_2 = \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{O} : x_1 \geq 0, x_2 \geq 5, x_3 \geq 0 \}$$

$$A_3 = \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{O} : x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 8 \}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 15$$

$$\text{Ζητούμενο} = N(A_1' A_2' A_3')$$

$$= N(\mathcal{O}) - (N(A_1) + N(A_2) + N(A_3)) + (N(A_1 A_2) + N(A_1 A_3) + N(A_2 A_3)) - N(A_1 A_2 A_3)$$

λύσεων της $x_1 + x_2 + \dots + x_v = k$ με $x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, v$

$$N(\emptyset) = \begin{bmatrix} 3 \\ 15 \end{bmatrix} = \binom{3+15-1}{15} = \binom{17}{15}$$

$$N(A_1) = \# \text{ ακερ. λύσεων της } x_1 + x_2 + x_3 = 15 = \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$N(A_2) = \begin{bmatrix} 3 \\ 10 \end{bmatrix} \quad x_1 \geq 7 \quad x_2 \geq 0 \quad x_3 \geq 0$$

$$N(A_3) = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$N(A_1, A_2) = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$N(A_1, A_3) = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$N(A_2, A_3) = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$N(A_1, A_2, A_3) = 0$$

③ Εφαρμογή

κατανομών k ομοίων σφαίριδιων σε v διακεκ. κελιά χωρητ. m
 $\parallel \leftarrow x_i = \# \text{ σφαίρ. στο κελί } i$

ακερ. λύσεων της $x_1 + x_2 + \dots + x_v = k$
 υπό $0 \leq x_i \leq m, i = 1, 2, \dots, v$

Λύση:

$$\mathcal{Q} = \{ (x_1, x_2, \dots, x_v) \in \mathbb{Z} : x_1 + x_2 + \dots + x_v = k, x_1, x_2, \dots, x_v \geq 0 \}$$

$$A_i = \{ (x_1, x_2, \dots, x_v) \in \mathcal{Q} : x_i \geq m+1 \}$$

Ζητούμενο $\# = N(\check{\bigcup}_{i=1}^v A_i) = \sum_{r=0}^v (-1)^r S_{v,r}$
 $\hookrightarrow$ συμψηφισμός

$$S_{v,0} = N(\emptyset) = \begin{bmatrix} v \\ k \end{bmatrix}$$

$$N(A_1, A_2, \dots, A_r) = \# \text{ ακερ. λύσεων της } x_1 + x_2 + \dots + x_v = k \text{ με } x_1, x_2, \dots, x_v \geq 0 \text{ και}$$

$\underbrace{x_1, x_2, \dots, x_r}_{\substack{\geq m+1 \\ \hookrightarrow \\ m+1}} \geq m+1$

$$= \begin{bmatrix} v \\ k - r(m+1) \end{bmatrix}$$

$\hookrightarrow$ διάφερα r κελιά και στο καθένα βάζω $m+1$ σφ.

$$\text{Άρα } S_{v,r} = \binom{v}{r} \begin{bmatrix} v \\ k - r(m+1) \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{Τελικά : Ζητούμενο } \# = \begin{bmatrix} v \\ k \end{bmatrix} + \sum_{r=1}^v (-1)^r \binom{v}{r} \begin{bmatrix} v \\ k - r(m+1) \end{bmatrix}$$

$$= \sum_{r=0}^v (-1)^r \binom{v}{r} [k - r \binom{v}{m+1}]$$

ακερ. λύσεων της $x_1 + x_2 + \dots + x_v = k$ με
 $0 \leq x_i \leq m$

④ Εφαρμογή (Πρόβλημα Γαμπαίου)

Πίψη ζαριού (κύβου) v φορές
 Π.θ. (αθρ. ρίψεων = k) = ?

Λύση: Αποζει. περ. ζύχης = $(x_1, x_2, \dots, x_v) \} \rightarrow$ ισοιθανα αποζει.
 $x_i = \text{ένδειξη } i \text{ ρίψης} \in \{1, 2, \dots, 6\}$

$$\text{Π.θ. (αθρ. ρίψεων = } k) = \# \frac{\text{ευνοϊκῶν}}{\text{δυνατῶν}} \rightarrow 6^v *$$

$$\# \text{ ευνοϊκῶν αποζει.} = \# \text{ αποζει. με αθρ. } k$$

$$\rightarrow y_i = x_i - 1$$

$$= \# \text{ ακερ. λύσεων της } x_1 + x_2 + \dots + x_v = k = y_1 + 1 + y_2 + 1 + \dots + y_v + 1 = k$$

$$1 \leq x_i \leq 6 \quad 0 \leq y_i \leq 5, \quad i = 1, 2, \dots, v$$

$$i = 1, 2, \dots, v$$

$$\begin{aligned} v &\rightarrow v \\ k-v &\rightarrow k \\ 5 &\rightarrow m \end{aligned} \quad (\text{βλέπε προηγ.})$$

$$\rightarrow = \sum_{r=0}^v (-1)^r \binom{v}{r} [k - v - 6r]$$

5) Θέμα 3 / Νοεμβ. 2003

SOS

20 φορές.

Εξαγωγή - Καταγραφή - Επανάποθεση
τραπουλόχαρτων από συνηθ. τράπουλα 52 φύ.

A 2 3 ... 10 J Q K

♠

♦

♥

♣

Αποζη. = Διατεζ. εικοσάδα από τραπουλ.
Πιθανότητα εμφάνισης και των 4 A = ?

Λύση: $n! = \frac{\text{ευνοϊκές}}{\text{δυνατές}}$

$$\text{δυνατές} = 52^{20}$$

ευνοϊκές = # αποζη. που εμφαν. και οι 4 A

Μια **ΚΑΚΗ** ιδέα είναι να χρησιμ. παλ/κή αρχή, δηλ. να φτιάξω μια
ευνοϊκή 20-άδα σε στάδια:

1^ο: Επιλ. θέσης για το A ♠ → 20

2^ο: >> A ♦ → 19

3^ο: >> A ♥ → 18

4^ο: >> A ♣ → 17

5^ο: Επιλογή φυλ. για υπ. → 48^{16} ή 52^{16} → παραπάνω από μια

⇒ Άρα # ευνοϊκών = $20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 48^{16}$ → Μια μόνο φορά να
εμφανιστούν

Εδώ διαφορετ. επιλογές στα θέματα μπορεί να οδηγήσουν στο ίδιο αποτέλ.

π.χ. 1^ο 2^ο 3^ο 4^ο 5^ο

A ♠ → A ♦ → A ♥ → A ♣ → A ♠ → 5

A ♠ → A ♦ → A ♥ → A ♣ → A ♠ → 5

Μπλάνο διηλεκτρικές

1A005

Με αρχή $\in - A$

$\underline{0}$ = $\sum_{r=0}^4$ δυνατών ανοδεί.

A_1 = $\sum_{r=0}^4$ ανοδεί. που δεν εμφ. ο A ♡

A_2 = >> A ◇

A_3 = >> A ♥

A_4 = >> A ♠

Άρα ευνοϊκές = $N(A_1 A_2 A_3 A_4)$

$$= \sum_{r=0}^4 (-1)^r S_{4,r}$$

$$S_{4,0} = N(\underline{0}) = S_2^{20}$$

$$N(A_1) = S_1^{20} \rightarrow S_{4,1} = \binom{4}{1} S_1^{20}$$

$$N(A_1 A_2) = S_0^{20} \rightarrow S_{4,2} = \binom{4}{2} S_0^{20}$$

$$N(A_1 A_2 \dots A_r) = (S_2 - r)^{20} \rightarrow S_{4,r} = \binom{4}{r} (S_2 - r)^{20}$$

$$\text{Άρα ευνοϊκές} = S_2^{20} + \sum_{r=1}^4 (-1)^r \binom{4}{r} (S_2 - r)^{20}$$

$$= \sum_{r=0}^4 (-1)^r \binom{4}{r} (S_2 - r)^{20}$$

$$\Rightarrow \text{πιθαν.} = \frac{\sum_{r=0}^4 (-1)^r \binom{4}{r} (S_2 - r)^{20}}{S_2^{20}}$$

⑥ Θέμα 31 Μαρ. 2004

λέξεων με 6 γραμμ. από τα $\{A, B, \Gamma, \Delta, E, Z, H, \Theta, I\}$ ώστε να συμ. όλα τα φωνήεντα = ?

Λύση: Ίδια με πριν :

Τράπουλα $\longleftrightarrow$ Αλφάβητο

Άσσοι $\longleftrightarrow$ Φωνήεντα

Εικοσάδα φ. $\longleftrightarrow$ Εξάδα-λέξη

$$\text{Αποστει.} = \sum_{r=0}^4 (-1)^r \binom{4}{r} (9-r)^6$$

⑦ Θέμα 31 Σεπ. 2005

εξαψήφιων αριθμών με ψηφία $1, 2, \dots, 7$ που περιέχουν όπωςδ. τα ψηφία $1, 2, 3$

Λύση: Ίδιο :

$$\sum_{r=0}^3 (-1)^r \binom{3}{r} (7-r)^6$$

8) Θέμα 3 / 2 έτη 2072

3A, 3B, 3Γ

α) # των. σε σειρά

β) # των. σε σειρά ώστε τα 3A να είναι συνεχ.

γ) # των. σε σειρά χωρίς 3 συν. από κανένα γράμμα

Λύση:

α) Μεταθ. 3 ειδών σε. $A \rightarrow 3$ $= \frac{9!}{3!3!3!}$
 $B \rightarrow 3$
 $\Gamma \rightarrow 3$

β) Μεταθ. 3 ειδών σε. $AAA \rightarrow 1$ $= \frac{7!}{3!3!}$
 $B \rightarrow 3$
 $\Gamma \rightarrow 3$

γ) Αρχή Ε-Α : ορίζω τα σύνολα
.
.
.