

① Αρχή Ε-Α

$$A_1, A_2, \dots, A_v \subseteq \mathcal{O}$$

$$N(\bigcup_{i=1}^v A_i) = \sum_{r=1}^v (-1)^{r-1} S_{v,r} \quad \bullet$$

$$N(\bigcap_{i=1}^v A_i) = \sum_{r=0}^v (-1)^r S_{v,r} \quad *$$

όπου $S_{v,0} = N(\mathcal{O})$

$$r \geq 1 \quad S_{v,r} = \sum_{\{i_1, i_2, \dots, i_r\} \subseteq \{1, 2, \dots, v\}} N(A_{i_1} A_{i_2} \dots A_{i_r})$$

② Γενίκευση

$T_{v,k} = \#$ στοιχ. του $\mathcal{O}$ που ανήκουν σε τουλάχιστον k αν'τα $A_1, \dots, A_v$

$N_{v,k} = \#$ στοιχ. του $\mathcal{O}$ που ανήκουν σε ακριβώς k αν'τα $A_1, \dots, A_v$

π.χ. $T_{v,1} = N(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_v) \quad \bullet$

$$T_{v,2} = N((A_1 A_2) \cup (A_1 A_3) \cup \dots \cup (A_{v-1} A_v))$$

$\vdots$

$$T_{v,v} = N(A_1 A_2 \dots A_v)$$

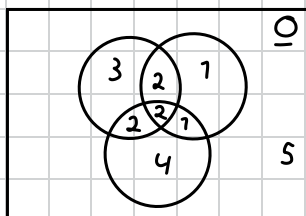
$$N_{v,0} = N(A_1' A_2' \dots A_v') \quad *$$

$$N_{v,1} = N(A_1 A_2' \dots A_v' \cup A_1' A_2 A_3' \dots A_v' \cup \dots \cup A_1' A_2' \dots A_{v-1}' A_v)$$

$$T_{v,k} = \sum_{r=k}^v (-1)^{r-k} \binom{r-1}{k-1} S_{v,r}$$

$$N_{v,k} = \sum_{r=0}^v (-1)^{r-k} \binom{r}{k} S_{v,r}$$

③ Παράδειγμα



$$N_{v,0} = 5$$

$$N_{v,1} = 8$$

$$N_{v,2} = 5$$

$$N_{v,3} = 2$$

(Αυτά που δεν ανήκουν σε κανένα)

(Ανήκουν μόνο σε 1)

(Ανήκουν μόνο σε 2)

$$T_{v,0} = 20$$

$$T_{v,1} = 15$$

$$T_{v,2} = 7$$

$$T_{v,3} = 2$$

(Ανήκουν σε όλα) = τουλάχιστον 0

(Η' ακριβώς 1 ή 2 ή 3) = τουλάχιστον

(Η' ακριβώς 2 ή 3)

(Ακριβώς 3)

④ Ανταλλάξιμα ζύγια

Έστω $A_1, A_2, \dots, A_n \subseteq \Omega$

A_n

$$N(A_1) = N(A_2) = \dots = N(A_n) = n_1$$

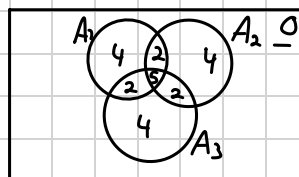
$$N(A_1 A_2) = N(A_1 A_3) = \dots = N(A_{n-1} A_n) = n_2$$

$$N(A_1 A_2 A_3) = \dots = N(A_{n-2} A_{n-1} A_n) = n_3$$

$\vdots$

$$N(A_1 A_2 \dots A_n) = n_n$$

τότε τα $A_1, A_2, \dots, A_n$ λέγονται ανταλλάξιμα



⑤ Τύποι E-A για ανταλλάξιμα

$$N(\bigcup_{i=1}^n A_i) = \sum_{r=1}^n (-1)^{r-1} \binom{n}{r} n_r$$

$$N(\bigcap_{i=1}^n A_i) = \sum_{r=1}^n (-1)^{n-r} \binom{n}{r} n_r$$

A_i όροι είναι $\binom{n}{r}$
 n_r συνδυασμοί

6 Άσκηση

Να βρείτε πόσοι αριθμοί από το 1 ως το 1000 δεν διαιρούνται ούτε με το 2 ούτε με το 3 ούτε με το 5.

Λύση: $\Omega = \{1, 2, \dots, 1000\}$

$$A_1 = \{ \omega \in \Omega : 2 | \omega \}$$

$$A_2 = \{ \omega \in \Omega : 3 | \omega \}$$

$$A_3 = \{ \omega \in \Omega : 5 | \omega \}$$

$\rightarrow$ πάμε ανάποδα, ώστε να έχουμε και το συμπλήρωμα

$$\Rightarrow N(\Omega) = 1000$$

$$N(A_1) = \frac{1000}{2} = 500$$

$$N(A_2) = \frac{1000}{3} = 333$$

$$N(A_3) = \frac{1000}{5} = 200$$

$$N(A_1 A_2) = \frac{1000}{6} = 166$$

$$N(A_1 A_3) = \frac{1000}{10} = 100$$

$$N(A_2 A_3) = \frac{1000}{15} = 66$$

$$N(A_1 A_2 A_3) = \frac{1000}{30} = 33$$

και $\frac{1000}{30} \rightarrow \in \mathbb{N}$

Ζητούμενο ημίθλος $= N(A_1' A_2' A_3')$

$$\overset{\text{αρχή } \in - A}{=} S_{3,0} - S_{3,1} + S_{3,2} - S_{3,3}$$

$$= N(\Omega) - (N(A_1) + N(A_2) + N(A_3)) + (N(A_1 A_2) + N(A_1 A_3) + N(A_2 A_3)) - N(A_1 A_2 A_3)$$

$$= 1000 - 500 - 333 - 200 + 166 + 100 + 66 - 33$$

$$= \dots$$

7) Μεταθέσεις χωρίς σταθερά σημεία

v ανθρώπους με τα καρέα τους.

Παίρνουν καρέο στην ζύχη.

1) Πιθανότητα όλοι να πάρουν το καρέο τους

2) >> κανείς να μην πάρει το καρέο του

Λύση:

$$1) \text{ αριθ. όλοι να πάρουν καρέο} = \frac{\text{ευνοϊκές}}{\text{δυνατές}} = \frac{1}{v!} \rightarrow \text{o καθένας έχει 1 καρέο-1 επιλογή}$$

$$2) \text{ αριθ. κανείς να μην πάρει το καρέο του} = \frac{\text{ευνοϊκές}}{\text{δυνατές}}$$

Ευνοϊκή = μεταθέση των v καρέων χωρίς σταθ. σημεία
(το καρέο i δεν πάει στην i θέση)

$\emptyset$ = όλες οι μεταθέσεις των v καρέων

A_i = οι μεταθέσεις του $\emptyset$ που το i καρέο πάει στην θέση του

$$\# \text{ ευνοϊκών} = N(A_1' A_2' \dots A_v') = \sum_{r=0}^v (-1)^r S_{v,r}$$

$$\begin{aligned} \text{Άρα } S_{v,r} &= \binom{v}{r} \cdot (v-r)! \\ &= \frac{v!}{r! (v-r)!} (v-r)! \\ &= \frac{v!}{r!} \quad r=1, 2, \dots, v \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \# \text{ ευνοϊκών} &= S_{v,0} + \sum_{r=1}^v (-1)^r \frac{v!}{r!} \\ &= \sum_{r=0}^v (-1)^r \frac{v!}{r!} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \text{ αριθ. κανείς να μην πάρει το καρέο του} &= \frac{\sum_{r=0}^v (-1)^r \frac{v!}{r!}}{v!} = \sum_{r=0}^v \frac{(-1)^r}{r!} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{1}{e} = 36\% \end{aligned}$$

$$S_{v,r} = \sum N(A_{i_1} A_{i_2} \dots A_{i_r})$$

$$\{i_1, \dots, i_r\} \subseteq \{1, 2, \dots, v\}$$

$N(A_{i_1} A_{i_2} \dots A_{i_r})$ = # μεταθ. των καρέων που τα καρέα $i_1, i_2, \dots, i_r$ πάνε στην θέση τους
 $= (v-r)!$

$A_1, \dots, A_v$ ανεξαρτ. $\underbrace{\quad \quad \quad}_r \underbrace{\quad \quad \quad}_{v-r}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$$

8) Παιχνίδι (huck-a-luck)

Ζάρι ρίχνεται 3 φορές

Πιθανότητα να εμφανιστεί τουλ. 1 εξαάρι = ?

Λύση:

$$\text{Π.θ. εμφ. τουλ. 1 εξαάρι} = \frac{\text{ευνοϊκές}}{\text{δυνατές}} = \frac{1}{6^3}$$

$$\text{Αποτελ.} = (x_1, x_2, x_3), \dots, x_i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$A_1 = \text{αποτελέσματα με } x_1 = 6 \rightarrow N(A_1) = N(A_2) = N(A_3) = 6^2$$

$$A_2 = \text{αποτελέσματα με } x_2 = 6 \rightarrow N(A_1 A_2) = N(A_1 A_3) = N(A_2 A_3) = 6$$

$$A_3 = \text{αποτελέσματα με } x_3 = 6 \rightarrow N(A_1 A_2 A_3) = 1$$

$$\begin{aligned} \# \text{ ευνοϊκών} &= N(A_1 \cup A_2 \cup A_3) \\ &= N(A_1) + N(A_2) + N(A_3) \\ &\quad - N(A_1 A_2) - N(A_1 A_3) - N(A_2 A_3) \\ &\quad + N(A_1 A_2 A_3) \\ &= 3 \cdot 36 - 3 \cdot 6 + 1 \\ &= \underline{\underline{97}} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{πιθανότητα} = \boxed{\frac{97}{276}} < \frac{1}{2}$$

9 Άσκηση (Θέμα 3 / Φεβ. 2002)

αριθμών από το $\{1, 2, \dots, 2002\}$ που διαιρούνται

α) με το πολύχριστον ένα από τους $\underbrace{6, 10, 15}$

β) με ακριβώς 2 >>> $\hookrightarrow$ 30 όχι 60

Λύση:

όπως ασκ. με 2, 3, 5