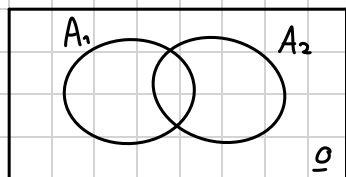


① A-E για $v=2$ σύνολα



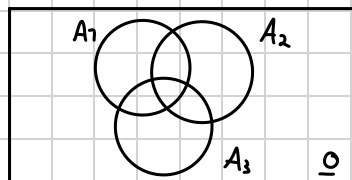
$$N(A_1 \cup A_2) = N(A_1) + N(A_2) - N(A_1 \cap A_2)$$

Απόδειξη: 1^η. $A_1 \cup A_2 = \underbrace{A_1 \cup (A_2 \cap A_1')}_\text{ξένα} \Rightarrow N(A_1 \cup A_2) = N(A_1) + N(A_2 \cap A_1')$
 $A_2 = \underbrace{(A_1 \cap A_2) \cup (A_1' \cap A_2)}_\text{ξένα} \Rightarrow N(A_2) = N(A_1 \cap A_2) + N(A_1' \cap A_2)$
 $\Rightarrow N(A_1 \cup A_2) = N(A_1) + N(A_2) - N(A_1 \cap A_2)$

2^η. Συνεισφορά κάθε $w \in \emptyset$ στα 2 μέλη

	$N(A_1 \cup A_2) = N(A_1) + N(A_2) - N(A_1 \cap A_2)$
$w \in A_1' A_2'$	$0 = 0 + 0 - 0$
$w \in A_1 A_2'$	$1 = 1 + 0 - 0$
$w \in A_1' A_2$	$1 = 0 + 1 - 0$
$w \in A_1 A_2$	$1 = 1 + 1 - 1$

② A-E για $v=3$ σύνολα



$$N(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = N(A_1) + N(A_2) + N(A_3) - N(A_1 \cap A_2) - N(A_1 \cap A_3) - N(A_2 \cap A_3) + N(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$$

$\xrightarrow{S_{3,1}}$
 $\xrightarrow{S_{3,2}} \quad \quad \quad \xrightarrow{S_{3,3}}$

Απόδειξη: 1^η. $v=2$ και επαγωγή

$$N(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = N(A_1) + N(A_2 \cup A_3) - N(A_1 \cap (A_2 \cap A_3))$$

$$= N(A_1) + N(A_2) + N(A_3) - N(A_1 \cap A_3) - N(A_1 \cap A_2) - N(A_1 \cap A_3) + N(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$$

2^η. Συνεισφορά κάθε $\omega \in \mathcal{O}$ στα 2 μέλη

	$N(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = S_{3,1} - S_{3,2} + S_{3,3}$
$\omega \in \mathcal{O}_{\text{συμ}}$	$0 = 0 - 0 + 0$
$\omega \in 1_{\text{συμ}}$	$1 = 1 - 0 + 0$
$\omega \in 2_{\text{συμ}}$	$1 = 2 - 1 + 0$
$\omega \in 3_{\text{συμ}}$	$1 = 3 - 3 + 1$

③ A-Ε για v σύνολα

$$N\left(\bigcup_{i=1}^v A_i\right) = S_{v,1} - S_{v,2} + S_{v,3} - \dots + (-1)^{v-1} S_{v,v}$$

$$= \sum_{r=1}^v (-1)^{r-1} S_{v,r}$$

όπου

$$S_{v,1} = N(A_1) + \dots + N(A_v)$$

$$S_{v,2} = N(A_1 A_2) + \dots + N(A_{v-1} A_v)$$

$$S_{v,v} = N(A_1 \dots A_v)$$

$S_{v,r}$ = άθροισμα ημεθαριθμυν όλων των $\left(\begin{smallmatrix} v \\ \text{ανά } r \\ \text{προσθεταίοι} \end{smallmatrix}\right)$ τμηών r συνόλων από τα $A_1, \dots, A_v$

$$= \sum_{\{i_1, i_2, \dots, i_r\} \subseteq \{1, 2, \dots, v\}} N(A_{i_1} A_{i_2} \dots A_{i_r})$$

Απόδειξη: 1^η Επαγωγή

2^η. Συνεισφορά κάθε $\omega \in \mathcal{O}$ στα 2 μέλη

	$N\left(\bigcup_{i=1}^v A_i\right) = S_{v,1} - S_{v,2} + S_{v,3} - S_{v,4} + \dots + (-1)^{v-1} S_{v,v}$
$\omega \in \mathcal{O}$	$0 = 0 - 0 + 0 - 0 \dots + (-1)^{v-1} 0$
$\omega \in 1$	$1 = 1 - 0 + 0 - 0 \dots + (-1)^{v-1} 0$
$\omega \in 2$	$1 = 2 - 1 + 0 - 0 \dots + (-1)^{v-1} 0$
$\vdots$	
$\omega \in r$	
$\vdots$	
$\omega \in v$	$1 = \underbrace{\binom{v}{1} - \binom{v}{2} + \binom{v}{3} - \binom{v}{4} \dots + (-1)^{v-1} \binom{v}{v}}_{\sum_{j=1}^v \binom{v}{j} (-1)^{j-1}}$

$$-\sum_{j=1}^r (rj)(-1)^j$$

$$- [(1+(-1))^{r+1}] = (1)$$

④ Πρόσφα

$$N(A_1' A_2' \dots A_n') = N((A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n)') = N(\emptyset) - N(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n)$$

$$= N(\emptyset) - \sum_{r=1}^n (-1)^{r-1} S_{n,r} = \sum_{r=0}^n (-1)^r S_{n,r}, \text{ όπου } S_{n,0} = N(\emptyset)$$

⑤ Άσκηση (Θέμα 3 / Μαρτ. 2003)

3 δοκιμασίες επιτυχίας Αετού, Βίσωνα, Γύνα

A = ζύγιο επιρ. στην A

B = >> B

Γ = >> Γ

- 1) $N(B) = 2N(A)$
- 2) $N(\Gamma) = 3N(A)$
- 3) $N(AB) = N(A\Gamma) = N(B\Gamma)$
- 4) $N(A \cup B \cup \Gamma) = 46$
- 5) $N(AB\Gamma) = 1$
- 6) $N(AB') = 5$

$$N(A) = ? \quad N(AB) = ?$$

$$\text{Λύση: } N(A \cup B \cup \Gamma) = N(A) + N(B) + N(\Gamma) - (N(AB) + N(A\Gamma) + N(B\Gamma)) + N(AB\Gamma)$$

$$46 = 6N(A) - 3N(AB) + 1$$

$$\begin{cases} 15 = 2N(A) - N(AB) & \textcircled{1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5 = N(A) - N(AB) & \textcircled{2} \end{cases}$$

$$N(A) = 10$$

$$N(AB) = 5$$

$$A = (AB) \cup (AB')$$

$$N(A) = N((AB) \cup (AB'))$$

6 Άσκηση (Θέμα 3 / Σεπτ. 2007)

100 φοιτητές εξετάστηκαν σε 3 θέματα $\theta_1, \theta_2, \theta_3$

100 γνώρισαν τουλ. 1 θέμα $\rightarrow N(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = 100$

70 >> 2 $\rightarrow N((A_1 A_2) \cup (A_1 A_3) \cup (A_2 A_3)) = 70$

10 >> 3 $\rightarrow N(A_1 A_2 A_3) = 10$

Κάθε θέμα το γνώριξε ο ίδιος αριθμός φοιτητών $\rightarrow N(A_1) = N(A_2) = N(A_3)$

Φοιτητών που δεν γνώρισαν το $\theta_1 = ? = N(A_1')$

Λύση: $\underline{0} =$ σύνολο των φοιτ. $N(\underline{0}) = 100$

1^{ος} τρόπος

$A_i =$ >> που γνώρ. το θ_i , $i=1,2,3$

Από Αρχή Ε-Α:

$$N(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = N(A_1) + N(A_2) + N(A_3) - (N(A_1 A_2) + N(A_1 A_3) + N(A_2 A_3)) + N(A_1 A_2 A_3)$$

$$100 = 3N(A_1) - (N(A_1 A_2) + N(A_1 A_3) + N(A_2 A_3)) + 10 \quad (1)$$

Από αρχή Ε-Α:

$$N((A_1 A_2) \cup (A_1 A_3) \cup (A_2 A_3)) = N(A_1 A_2) + N(A_1 A_3) + N(A_2 A_3) - (N(A_1 A_2 A_3) + N(A_1 A_2 A_3) + N(A_1 A_3 A_2 A_3)) + N(A_1 A_2 A_1 A_3 A_2 A_3)$$

$$= N(A_1 A_2) + N(A_1 A_3) + N(A_2 A_3) - 2N(A_1 A_2 A_3)$$

$$\Leftrightarrow N(A_1 A_2) + N(A_1 A_3) + N(A_2 A_3) = 90 \quad (2)$$

$$(1) \Rightarrow 100 = 3N(A_1) - 90 + 10$$

$$(2) \Rightarrow N(A_1) = 60$$

$$\text{άρα } N(A_1') = 40$$

Θεμ. που λήθηκαν = ?

$$\text{Λυμένα θεμ. από φοιτ. που ελ. 3} = 3 \cdot 10 = 30$$

$$\text{Λυμένα θεμ. από φοιτ. που ελ. 2} = 2(70 - 10) = 120$$

$$\text{Λυμένα θεμ. από φοιτ. που ελ. 1} = 1(100 - 70) = 30$$

$$\# \text{ Λυμ. θεμ.} = 180$$

$$\# \text{ Όχι λυμ. θεμ.} = 300 - 180 = 120$$

Άρα # Θεμ. 1 που δεν λυθ

$$= \frac{120}{3} = 40$$