

① Γενικευμένα παραγοντικά

8/4/25

Διατάξεων v ανά $k = (v)_k = v(v-1)(v-2)\dots(v-(k-1))$
καθοδικό παραγοντικό $\swarrow$ $\underbrace{\hspace{10em}}_{k \text{ παράγοντες}}$ " $v-k+1$ "
 k τάξης του v

Επαναληπτικών διατάξεων v ανά $k = v^k = \underbrace{v \cdot v \cdot \dots \cdot v}_{k \text{ φορές}}$

Ιδιότητα του $(v)_k : (v)_{k+1} = (v)_k (v-k)_1$

Απόδειξη: $(v)_{k+1} = \underbrace{v(v-1)(v-2)\dots(v-k+1)}_k \underbrace{(v-k)(v-k-1)\dots(v-k-j+1)}_1$
 $= (v)_k (v-k)_1$

Χρησιμοποιώντας αυτή την ιδιότητα μπορώ να επεκτείνω τον ορισμό του $(x)_k$ για $x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}$

$k \in \mathbb{Z}, k > 0 : (x)_k = x(x-1)\dots(x-k+1)$
 $(x)_0 = ?$

Πρέπει να ισχύει η ιδιότητα:

$(x)_{0+1} = (x)_0 (x-0)_1$
" " "

$(x)_1 \quad (x)_0 \quad (x)_1$

Άρα πρέπει να ορίσει $(x)_0 = 1$

$k \in \mathbb{Z}, k > 0 : (x)_{-k} = ?$

$(x)_0 = (x)_{-k+k} = (x)_{-k} (x+k)_k$
" " "

Άρα $(x)_{-k} = (x+k)_k = 1$

Άρα πρέπει να ορίσει $(x)_{-k} = \frac{1}{(x+k)_k}$

② Ορισμός

Το καθοδικό παραγοντικό κ -τάξης ($\kappa \in \mathbb{Z}$) του $x \in \mathbb{R}$ ορίζεται ως:

$$\kappa \in \mathbb{Z}, \kappa > 0: (x)_\kappa = x(x-1)\dots(x-\kappa+1)$$

$$(x)_0 = 1$$

$$(x)_{-\kappa} = \frac{1}{(x+1)(x+2)\dots(x+\kappa)}$$

Με αυτόν τον ορισμό ισχύει η βασική ιδιότητα:

$$(x)_{\kappa+1} = (x)_\kappa (x-\kappa)_1$$

③ Δυϊκή έννοια

Το ανοδικό παραγοντικό κ -τάξης ($\kappa \in \mathbb{Z}$) του $x \in \mathbb{R}$ ορίζεται ως:

$$\kappa \in \mathbb{Z}, \kappa > 0: [x]_\kappa = x(x+1)(x+2)\dots(x+\kappa-1)$$

$$[x]_0 = 1$$

$$[x]_{-\kappa} = \frac{1}{(x-1)(x-2)\dots(x-\kappa)}$$

Με αυτό τον ορισμό έχω την βασική ιδιότητα:

$$[x]_{\kappa+1} = [x]_\kappa [x+\kappa]_1$$

④ Διωνυμικοί Συντελεστές

$$x \in \mathbb{R}, \kappa \in \mathbb{Z}, \kappa \geq 0:$$

Ορισμός:

$$\binom{x}{\kappa} = \frac{(x)_\kappa}{\kappa!}$$

$$\left[\begin{matrix} x \\ \kappa \end{matrix} \right] = \frac{[x]_\kappa}{\kappa!}$$

Γενικεύουν τους τύπους αλφών και επαναληπτικών συνδυασμών:

$$r \in \mathbb{Z}, r > 0:$$

$$\begin{aligned} \binom{r}{\kappa} &= \frac{(r)_\kappa}{\kappa!} = \frac{r(r-1)\dots(r-\kappa+1)}{\kappa!} \\ &= \frac{r!}{\kappa!(r-\kappa)!} \end{aligned}$$

$$\left[\begin{matrix} r \\ \kappa \end{matrix} \right] = \frac{[r]_\kappa}{\kappa!} = \frac{r(r+1)(r+2)\dots(r+\kappa-1)}{\kappa!} = \frac{(r+\kappa-1)_\kappa}{\kappa!} = \binom{r+\kappa-1}{\kappa}$$

5) Ιδιότητες

- $(x)_k = [x - k + 1]_k$
- $[x]_k = (x + k - 1)_k$
- $(x)_k = x(x-1)(x-2) \dots (x-k+1)$
 $= (-1)^k (-x)(-x+1)(-x+2) \dots (-x+k-1)$
 $= (-1)^k [-x]_k$
- $[x]_k = (-1)^k (-x)_k$
- $\binom{x}{k} = \binom{x-k+1}{k}$
- $\binom{x}{k} = \binom{x+k-1}{k}$
- $\binom{x}{k} = (-1)^k \binom{-x}{k}$
- $\begin{bmatrix} x \\ k \end{bmatrix} = (-1)^k \begin{bmatrix} -x \\ k \end{bmatrix}$

6) Γεννήτρια

Έστω $(a_n) = (a_0, a_1, a_2, \dots)$ ακολουθία. Η γεννήτρια $A(t)$ της (a_n) είναι:
$$A(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$$

7) Ιδιότητα-Πρόταση

$$A(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k, \quad B(t) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k, \quad \Gamma(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k t^k$$

$$A(t) = B(t) \iff a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \dots \iff$$
$$a_0 = b_0, a_1 = b_1, a_2 = b_2 \iff$$
$$a_k = b_k, k \geq 0$$

$$A(t) = B(t) + \Gamma(t) \iff$$
$$a_k = b_k + \gamma_k, k \geq 0$$

$$A(t) = cB(t) \iff$$
$$a_k = cb_k, k \geq 0$$

$$A(t) = B(t) \Gamma(t) \Leftrightarrow$$

$$a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots = (b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \dots)(\gamma_0 + \gamma_1 t + \gamma_2 t^2 + \dots) \Leftrightarrow$$

$$a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots = b_0 \gamma_0 + (b_0 \gamma_1 + b_1 \gamma_0) t + (b_0 \gamma_2 + b_1 \gamma_1 + b_2 \gamma_0) t^2 + \dots \Leftrightarrow$$

$$a_0 = b_0 \gamma_0, a_1 = b_0 \gamma_1 + b_1 \gamma_0, a_2 = b_0 \gamma_2 + b_1 \gamma_1 + b_2 \gamma_0, \dots \Leftrightarrow$$

$$a_k = b_0 \gamma_k + b_1 \gamma_{k-1} + b_2 \gamma_{k-2} + \dots + b_k \gamma_0 = \sum_{i=0}^k b_i \gamma_{k-i}, k \geq 0$$

8) Γεννήτριες βασικών ακολουθιών

1) $a_k = 1, k \geq 0$

$$A(t) = \sum_{k=0}^{\infty} t^k = 1 + t + t^2 + t^3 + \dots$$

$$x = 1 + t + t^2 + t^3 + \dots + t^v \Rightarrow$$

$$tx = t + t^2 + t^3 + \dots + t^{v+1} \Rightarrow$$

$$x - tx = 1 - t^{v+1} \Rightarrow$$

$$x(1-t) = 1 - t^{v+1} \Rightarrow$$

$$x = \frac{1 - t^{v+1}}{1-t} \Rightarrow A(t) = \lim_{v \rightarrow \infty} \frac{1 - t^{v+1}}{1-t} = \frac{1}{1-t}, |t| < 1$$

2) $a_k = \binom{v}{k}, v \in \mathbb{Z}, v \geq 0$ σταθ., $k \geq 0$

$$A(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{v}{k} t^k = \binom{v}{0} + \binom{v}{1} t + \binom{v}{2} t^2 + \dots + \binom{v}{v} t^v + \dots$$

$$= (1+t)^v \rightarrow \text{Δυναμικό Θεώρημα} \quad \underline{\underline{=}}$$

Απόδειξη:

1^{ος} zp.: Επαγωγική, βασισμένη $\binom{v+1}{k} = \binom{v}{k} + \binom{v}{k-1}$

2^{ος} zp.: Συνδυαστική απόδειξη

$$(1+t)^v = (t^0 + t^1)^v$$

$$= (t^0 + t^1)(t^0 + t^1)(t^0 + t^1) \dots (t^0 + t^1)$$

$$= t^{0+0+\dots+0} + t^{0+0+\dots+1} + t^{1+1+\dots+1} \quad \text{t ηαρενθ.}$$

$$\hookrightarrow \text{γενικός όρος: } t^{x_1 + x_2 + \dots + x_v}, x_i \in \{0, 1\}$$

$$= \sum_{k=0}^v a_k t^k = \binom{v}{k}$$

$\hookrightarrow$ είναι σαν # ακεραίων μισσεων της $x_1 + x_2 + \dots + x_v = k$ με $x_i \in \{0, 1\}$

3) $v \in \mathbb{Z}, v > 0$ σταθ:

$$a_k = \binom{v}{k}, k \geq 0$$

$$A(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{v}{k} t^k = \binom{v}{0} + \binom{v}{1}t + \binom{v}{2}t^2 + \dots = \frac{1}{(1-t)^v} = (1-t)^{-v}$$

→ Αρμεζικό

Δυναμικό Θεώρημα

Απόδειξη:

$$(1-t)^{-v} = \left(\frac{1}{1-t} \right)^v = (t^0 + t^1 + t^2 + \dots)^v$$

$$= (t^0 + t^1 + t^2 + \dots)(t^0 + t^1 + t^2 + \dots) \dots (t^0 + t^1 + t^2 + \dots)$$

$$= \sum_{x_1+x_2+\dots+x_v} t^{x_1+x_2+\dots+x_v} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k = \binom{v}{k}$$

→ είναι σαν # αθέρων μύρων της $x_1+x_2+\dots+x_v = k$ με $x_i \geq 0$

4) $a_k = \frac{1}{k!}, k \geq 0$

$$A(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \dots = e^t$$

9) Δυναμικό Θεώρημα

Ερώτηση: $(x+y+z+w)^{32}$

Ποιος είναι ο συντελεστής $x^5 y^2 z^{10} w^{15}$?

Τυπικός όρος: $xyzzww \dots xz$ με $5x, 2y, 10z, 15w$

$$\text{Συντελεστής του } x^5 y^2 z^{10} w^{15} = \# \text{ μεταθέσεων} = \frac{32!}{5! 2! 10! 15!}$$

Θεώρημα: Στο ανάπτυγμα $(x_1+x_2+\dots+x_r)^v$ υπάρχουν όροι της μορφής $x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_r^{k_r}$ με $k_1+k_2+\dots+k_r = v$ (συνεπικά $\binom{v}{k_1, k_2, \dots, k_r}$ όροι)

Ο συντελεστής του $x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_r^{k_r}$ είναι ο $\frac{v!}{k_1! k_2! \dots k_r!}$